

各ページの説明は、このような薄青の枠の中に書き込んでします。

# 逆に考え、逆に解く

神戸大学工学研究科 客員教授(元大阪大、摂南大)  
久保司郎

- 1. 逆問題とは？
- 2. 逆問題研究を始めたきっかけ
- 3. 逆問題の分類
- 4. 逆問題の特性と解析手法
- 5. 種々の逆問題解析
- 6. 余談

日本機械学会の100周年記念として、100冊の解説本を出す企画が提案されました。私の方にも、「逆問題」について書くようにとの依頼がありました。題名は、とっつきやすい「逆に考え、逆に解く」にしました。

「逆に考え、逆に解く」、  
日本機械学会100周年記念  
出版物 テクノライフ選書、  
オーム社、1997.8



配布資料 省いている頁、写真等があります  
ご質問 いつでも可。割り込んでください

# 経歴

1971 大阪大学工学部機械工学科卒業

1971～1976 大阪大学工学研究科産業機械工学専攻

1976 大阪大学工学部 助手

1980～1981 Brown大学(USA) 客員研究員、研究員

1981 大阪大学工学部 講師

1982 大阪大学工学部 助教授

1990 大阪大学 教授

2013 摂南大学 教授

2019 神戸大学 客員教授

# 1. 逆問題とは？

逆問題に関する国際会議は、1990年代からに始まりました。特に最初の二つの会議には、大学在任中、第1回から欠かさず出席しました。

## 逆問題に関する国際会議

ISIP: Inverse Problems in Engineering Mechanics  
1992-

Inverse Problems in Engineering: Theory and  
Practice 1993-

Int. Conf. on Applied Inverse Problems 2001-

Int. Conf. on Inverse Problems: Recent Advances in  
Theories and Numerics 2002-

# 逆問題の代表例

X線CT (Computed Tomography)  
Tomos (ギリシャ語, cut, section) + graphy (画法)

逆問題の中で、もっとも有名なものは、X線CTです。医療用検査に広く適用されているのは、よくご存じのことかと思えます。

CTはComputed Tomographyを略したものです。ギリシャ語のTomosは切るという意味で、これがgraphy (画法)と結びついているので、CTとは、計算によって断面像をつくることを表しています。

X線を種々の方向から照射すると、投影像が得られます。多くの投影像から断面像を求めるものは、逆問題になります。

# 光CTの生体への応用

## 生体計測用マルチチャンネル時間分解分光システム

- X線CTは、直進性のあるX線を使いますが、被爆のデメリットがあります。このため、X線の代わりに光を使うのが、光CTです。光を生体の境界部のどこから入射すると、透過光が多数の境界点で観測されます。

逆に、入射する点を種々に変えたときに境界部の多数点でマルチチャンネルで計測された光をもとに断面像を構成するのが、光CTという逆問題です。

光は生体内で散乱するため、X線CTに比べると、光CTの解析は、難しくなります。

# 吸収スペクトルからの物質の分離

## 3種類の物質の混合物の吸収スペクトル

⇒ 単体の吸収  
スペクトル

3種類の物質があり、これらが単独で存在するときの吸収スペクトルが分かっているものとします。これらの物質を適当な割合で混合したときの吸収スペクトルは、単一の物質の吸収スペクトルを重ね合わせたものとして簡単に得られます。

逆に、未知の割合で混合された物の吸収スペクトルが複数個あるときに、単一の物質の吸収スペクトルを求めるものは逆問題になります。

# 重力探査

地中の密度分布より、地表の重力の微妙な変化を求めるのに対し、地表で計測される重力の変化から地中の密度分布を求めるのが、逆問題です。

重力の分布

⇒ 密度分布

以上のように、逆問題には多種多様なものがあります。

## 逆問題の例

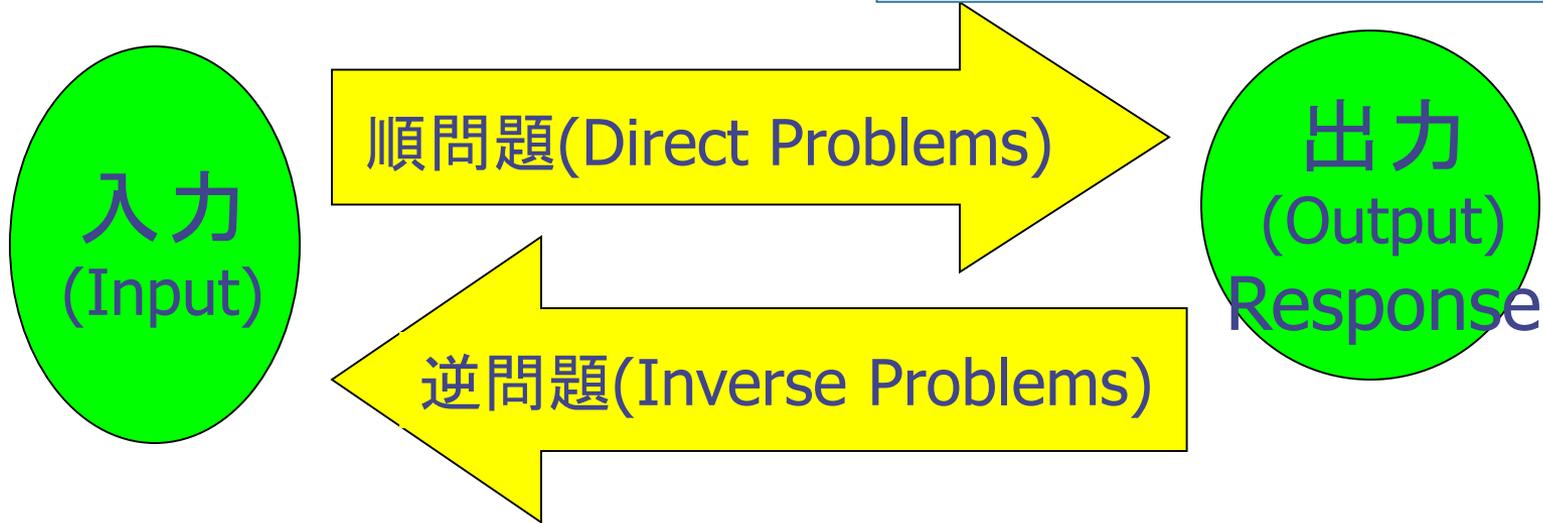
- ◆ X線CT
- ◆ 2次元像からの3次元像の構成
- ◆ 化石・遺跡からの歴史推定
- ◆ 言語の変遷の推定
- ◆ 雑音の入った信号からの原信号の回復
- ◆ 重力探査、電気探査による埋蔵物の推定
- ◆ ...

# •逆とは？

## What Are Inverse Problems

逆転. 逆境. 逆臣. 逆行. 逆走

それでは、逆問題とは何でしょうか。「逆」がつく言葉には悪い意味を持つものが多いです。「逆問題」があるには「順問題」があります。「順問題」では入力から出力を導きます。「逆問題」は、出力から入力を推定するものととらえることができます。



# We can be a Good Detective Like Sherlock Holmes

逆問題国際機構でも、「逆問題」とは出力から入力を推定するものととらえ、探偵シャーロックホームズが例えに出てきます。

## 2. 逆問題研究を始めたきっかけ

3次元J積分研究の収穫期にあった1980年代はじめ、隆盛期にあった境界要素法の式を逆に解いてき裂同定を行うことを思いました。新配属されたM1学生に、J積分とき裂同定のどちらを研究したいか聞いたところ、彼はすぐに、まだ得体のしれない逆解析を選びました。現神戸大教授の阪上氏です。この様子は談話室にも書いています: JSME談話室<https://www.jsme.or.jp/column/201411.html>

### 非線形破壊力学(クリープJ積分、J積分)から逆問題へ

1983年春

阪上隆英氏(現 神戸大教授) 修士1年

研究テーマ

クリープJ積分 → 3次元き裂のJ積分(Jグローバル) 収穫期

or

電気ポテンシャル法に対する逆問題解析 未知の領域

科学研究費補助金

電気ポテンシャルCT法(断層法)

# 経歴

3頁の経歴に、研究主軸の転換を重ねたものです。最初は高温のクリープき裂、破壊力学とJ積分を研究していました。1980年代からき裂同定に関連する逆問題をはじめ、逆問題解析の研究を行いました。

1971 大阪大学

1971~1976 大阪大学工学研究科産業機械工学専攻

高温破壊力学の研究

1974 修正J積分(クリープJ積分)の提案

1979 機械学会論文賞受賞(クリープき裂成長理論解析)

J積分の拡張

1976 大阪大学工学部 助手

1980~1981 Brown大学(USA) 客員研究員、研究員

1980 Int. Conf. on Creep, Sheffield, UK

1981 大阪大学工学部 講師

1982 大阪大学工学部 助教授 1982 日本材料学会論文賞受賞(小規模クリープ理論解析)

1990 大阪大学 教授

1983 逆問題に関する研究開始

1984 電気ポテンシャルCT法に関する科研採択

1985 電気ポテンシャルCT法に関する機械学会論文

1988 機械学会論文賞受賞(電気ポテンシャルCT法)

1988 JSME Int. J., review "Inverse Problems"

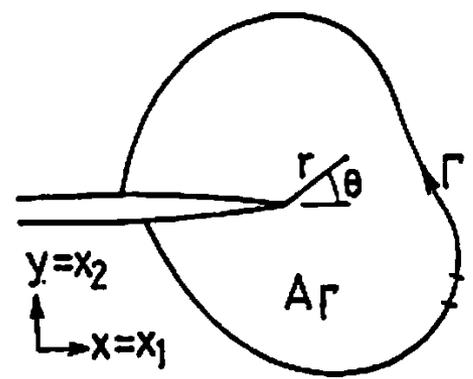
1992 「逆問題」, 培風館

1993 1st Int. Symp. on Inverse Problems in Eng.

2013 摂南大学 教授

2019 神戸大学 客員教授

# J 積分の経路積分表示



J 積分の積分経路  $\Gamma$  と積分領域  $A_\Gamma$

J積分によれば、き裂先端を囲む線積分により、き裂先端の特異場の強さが評価できます。この特徴に魅力を感じ、研究を進めました。

領域積分が消える不思議？

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{\Gamma} \left( W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} d\Gamma \right) \\
 &= \int_{\Gamma} \left( W - \sigma_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dy \\
 &\quad + \left( \tau_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dx
 \end{aligned}$$

き裂先端にある応力とひずみの特異性を表すパラメータ

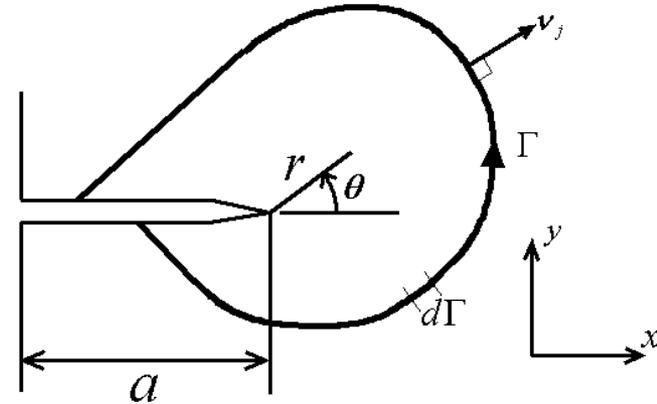
# J積分 塑性特異場の代表パラメータ

J積分が与えられると、き裂先端の非線形特異応力、ひずみ場を表記することができます。

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left[ \frac{\sigma}{\sigma_0} \right]^n$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left[ \frac{J}{I_n \sigma_0 \varepsilon_0 r} \right]^{1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \left[ \frac{J}{I_n \sigma_0 \varepsilon_0 r} \right]^{n/(n+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta)$$



き裂先端周りの $\Gamma$ で囲まれる領域でエネルギー計算→経路積分表示

$$J = \int_{\Gamma} [W dy - T_i (\partial u_i / \partial x) d\Gamma]$$

# J積分と修正J積分（クリープJ積分）

## 非線形弾性と定常クリープのアナロジー（類似性）

J積分におけるひずみをひずみ速度に置き換えると、高温クリープ条件下のき裂に適用できることを思い付き、修正J積分と名付けました。世界初の提案でしたが、命名とPRで失敗しました。この様子は談話室にも書いています：  
JSME談話室<https://www.jsme.or.jp/column/201005.htm>

ひずみ ⇔ ひずみ速度  
変位 ⇔ 変位速度  
(応力 ⇔ 応力)

## J積分

非線形弾性体

$$\epsilon = f(\sigma)$$

## J積分

$$J = \int_{\Gamma} \left( W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} d\Gamma \right)$$

W: ひずみエネルギー密度

$$W = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon$$

J: き裂先端近傍の  $\sigma, \epsilon$  を代表

失敗

- 早く発表 ○
- 良い名前
- 英語で発表

## 修正 J 積分, $J^*$

C\*積分

( $J^*$  積分, クリープ J 積分)

クリープ体

$$\dot{\epsilon} = f(\sigma)$$

定常クリープ

## 修正 J 積分, $J^*$

$$J^* = \int_{\Gamma} \left( W^* dy - T_i \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x} d\Gamma \right)$$

$W^*$ : ひずみエネルギー速度密度

$$W^* = \int_0^{\dot{\epsilon}} \sigma d\dot{\epsilon}$$

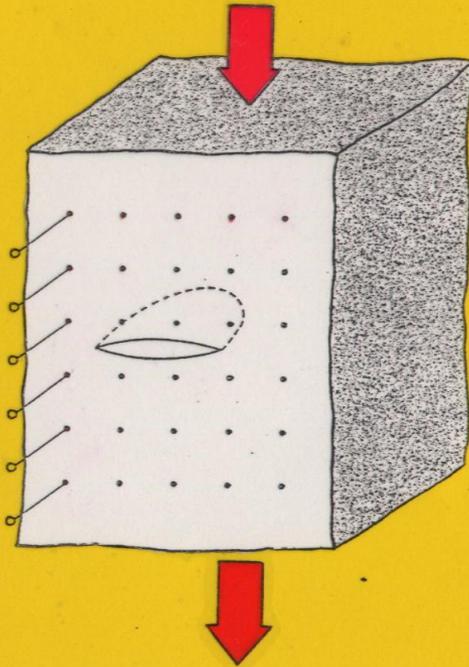
$J^*$ : き裂先端近傍の  $\sigma, \dot{\epsilon}$  を代表

# 逆問題解析と電気ポテンシャルCT法

3次元物体に通電したとき、き裂があれば物体表面の電気ポテンシャル分布に変化がでます。この変化よりき裂を同定する逆問題を考えました。いわゆる電気ポテンシャル法によるき裂長さ測定 of 拡張形ですが、逆問題解析手法を適用することにより、き裂の位置や形状までわかると謳い、この手法を電気ポテンシャルCT法と名付けました。

電気ポテンシャル分布に関する  
多点データ

Current



計算機支援による  
逆問題解析法

境界要素逆問題解析法

- ・ 未知境界同定法
- ・ 境界残差最小化法

き裂検出

き裂形状  
寸法測定

# 未知境界同定法

境界要素法によれば境界上の電気ポテンシャルと流束の間の相互関係式が得られます。これに、表面上で観測される電気ポテンシャル分布と流束0の条件を合わせて代入し、き裂存在面におけるポテンシャルと流束について逆に解けば、流束0の部分として、き裂部が同定できると考えました。この方法を未知境界同定法と名付けました。

## 内部境界同定問題

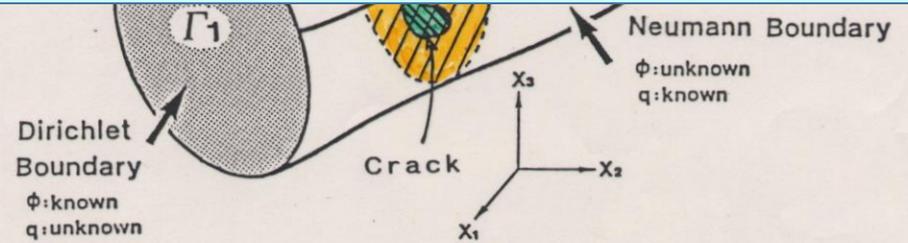
⇒境界値推定問題

き裂：流束=0

基本的アイデアはシンプル：

境界要素法⇒境界値相互関係  
自由表面で観測値(過剰境界条件) ⇒ 全境界値⇒き裂位置

事前調査：講習会受講



$$[H] \{\phi\} - [G] \{q\} = \{0\} \quad (7)$$

$$h_{ij} = c_i + \int_{S_j} q^*(A_i, B) dS(B) \quad (i=j)$$

$$= \int_{S_j} q^*(A_i, B) dS(B) \quad (i \neq j)$$

$$g_{ij} = \int_{S_j} \phi^*(A_i, B) dS(B)$$

$$[H_u \ G_u] \begin{Bmatrix} \phi_u \\ q_u \end{Bmatrix} = - [H_k \ G_k] \begin{Bmatrix} \phi_k \\ q_k \end{Bmatrix} \quad (9)$$

過剰規定境界  $\Gamma_u$  上の測定値 (電気ポテンシャル値) を境界積分方程式に代入

不完全規定境界  $\Gamma_k$  上の境界値を計算

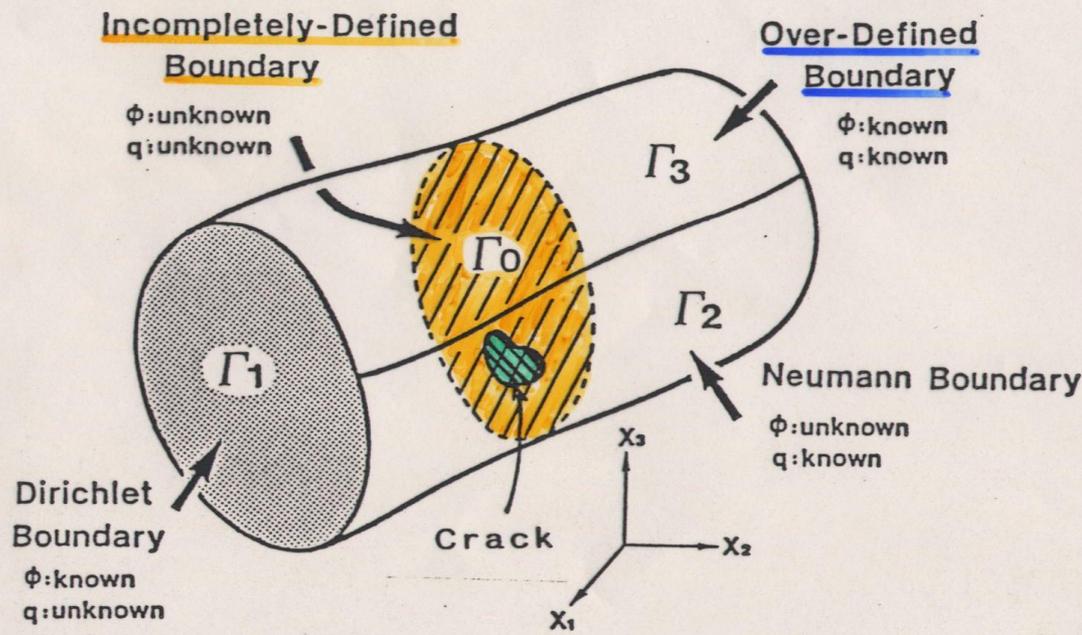
き裂部：流束=0

or (電気ポテンシャル≠0)

# 境界残差最小化法

未知境界同定法には何となく危うさがあったため、逆解析法として境界残差最小化法も提案しました。これは、き裂の位置や形状を種々に変えて表面上の電気ポテンシャル分布を計算し、それと計測された分布との間で残差を評価し、残差が最小となるようなき裂を同定結果とするものです。ポテンシャル計算は境界要素法により効率的に行えます。

## 境界残差最小化法

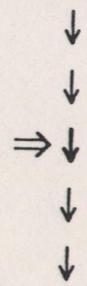


不完全規定境界  $\Gamma_0$  において  
 き裂の位置と形状を仮定

$\Gamma_0$  について

- き裂部分  
 $q$ : 既知,  $\phi$ : 未知
- き裂以外  
 $q, \phi$ : 連続

境界要素解析



### 残差平方和

$$R = \int_{\Gamma_3} w (\phi^{(c)} - \phi^{(m)})^2 d\Gamma$$

$\phi^{(c)}$ : 仮定き裂に対するBEM解析値

$\phi^{(m)}$ : 測定などによる過剰規定境界値

未知境界同定法の結果の例です。き裂存在面のうち、き裂に該当する要素の流束が0になっており、き裂同定ができています。しかし、要素を増やすと結果が不安定になります。

# 未知境界同定法の適用

- 少ない要素数

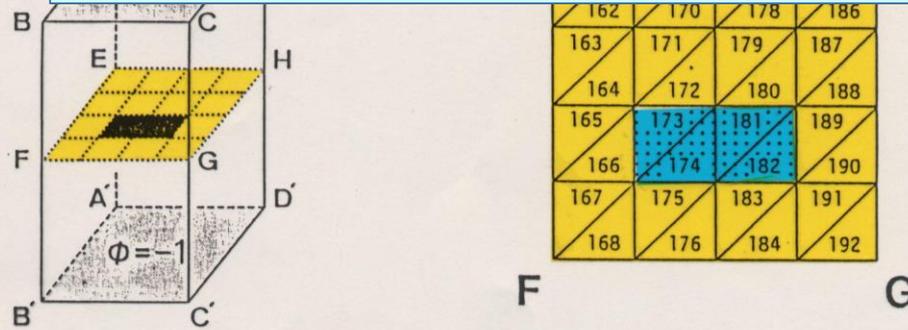


FIGURE 大 路・久保・阪上, 日本機械学会論文集(A編)(以下 機論Aと略記), 52-477 (1986), p.1352 より転載  
 A three-dimensional numerical simulation of cracks by the inverse boundary integral equation method. defined boundary EFGH.

大 路・久保・阪上, 機論A, 52-477 (1986), p.1352 より転載

Boundary values on the incompletely defined boundary EFGH estimated by the inverse boundary integral equation method.

き裂部では

流束=0

ポテンシャル $\Phi \neq 0$

Element No.	Potential $\phi$	Flux $q$	Element No.	Potential $\phi$	Flux $q$
161	0.000	-1.20	177	0.000	-1.10
162	0.000	-1.00	178	0.000	-1.00
163	0.000	-1.13	179	0.000	-1.08
164	0.000	-1.11	180	0.000	-1.35
165	0.000	-1.19	181	0.124	0.00
166	0.000	-1.30	182	0.109	0.00
167	0.000	-1.18	183	0.000	-1.44
168	0.000	-1.12	184	0.000	-1.18
169	0.000	-1.10	185	0.000	-1.09
170	0.000	-1.01	186	0.000	-1.15
171	0.000	-1.06	187	0.000	-1.01
172	0.000	-1.43	188	0.000	-1.14
173	0.109	0.00	189	0.000	-1.30
174	0.124	0.00	190	0.000	-1.18
175	0.000	-1.35	191	0.000	-1.12
176	0.000	-1.19	192	0.000	-1.22

一意性（存在面の不明なき裂の同定）

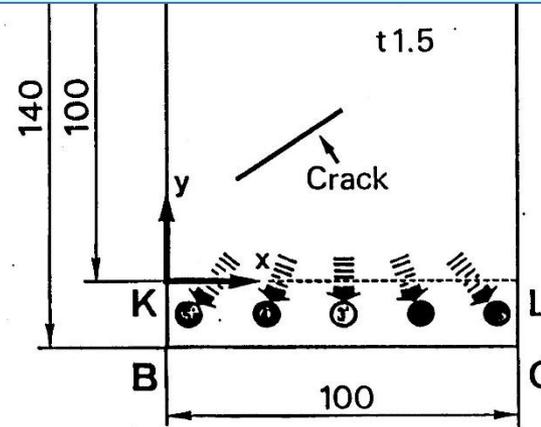
位置不明

2次元き裂：  
2通りの電流負荷に対する  
Φ分布が必要

マルチ電流負荷方式

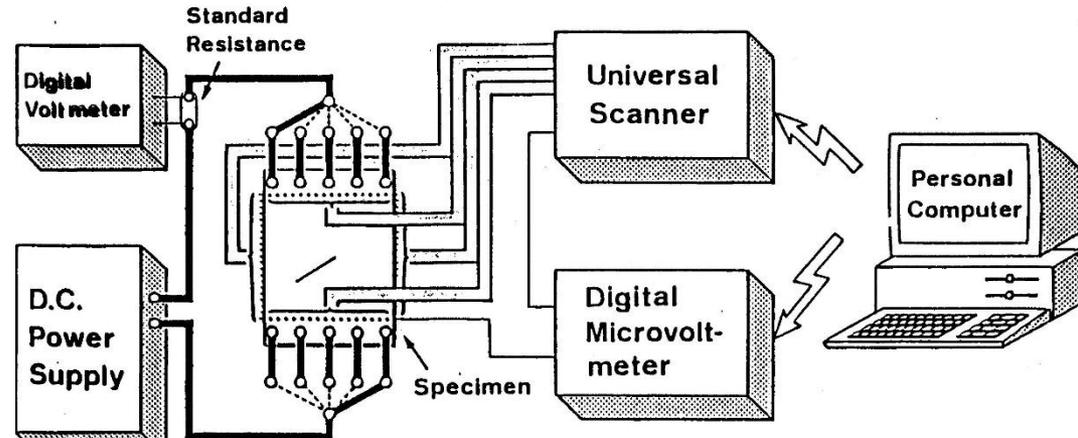
3次元き裂：  
3通りの電流負荷に対する  
Φ分布が必要

き裂存在面が未知の場合には、1通りの電流負荷に対する境界上の電気ポテンシャル分布のみからでは、き裂同定はできません。このため、複数の電流負荷に対する計測結果を用いるマルチ電流負荷方式を提案しました。



Location of Crack Tips  
Left  
(x,y)=(20.0,30.0)  
Right  
(x,y)=(50.0,50.0)

阪上・久保・ほか, 機論A, 53-492 (1987), p.1598 より転載

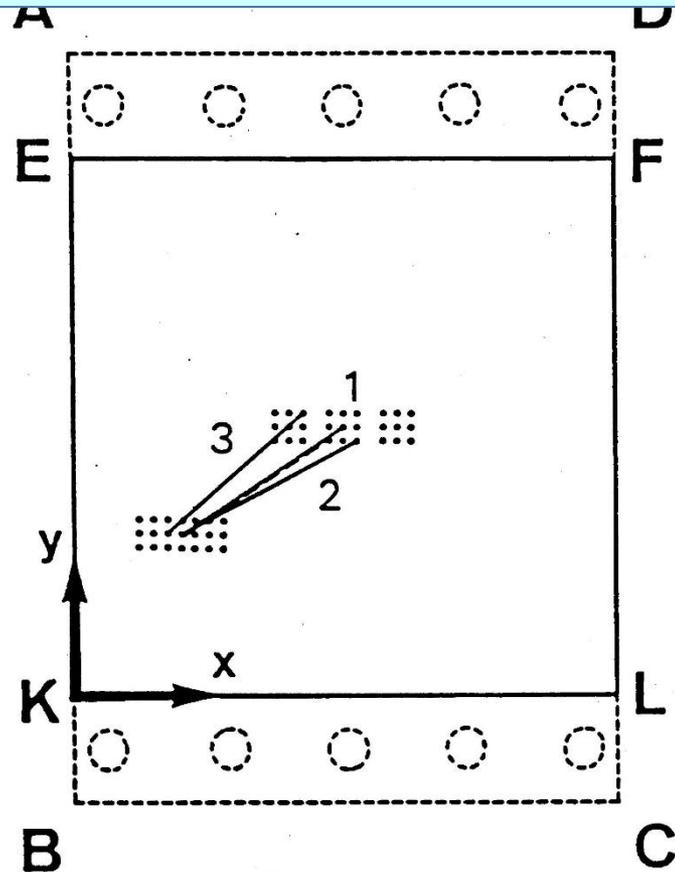


阪上・久保・ほか, 機論A, 53-492 (1987), p.1598 より転載

# き裂存在面不明 2次元き裂

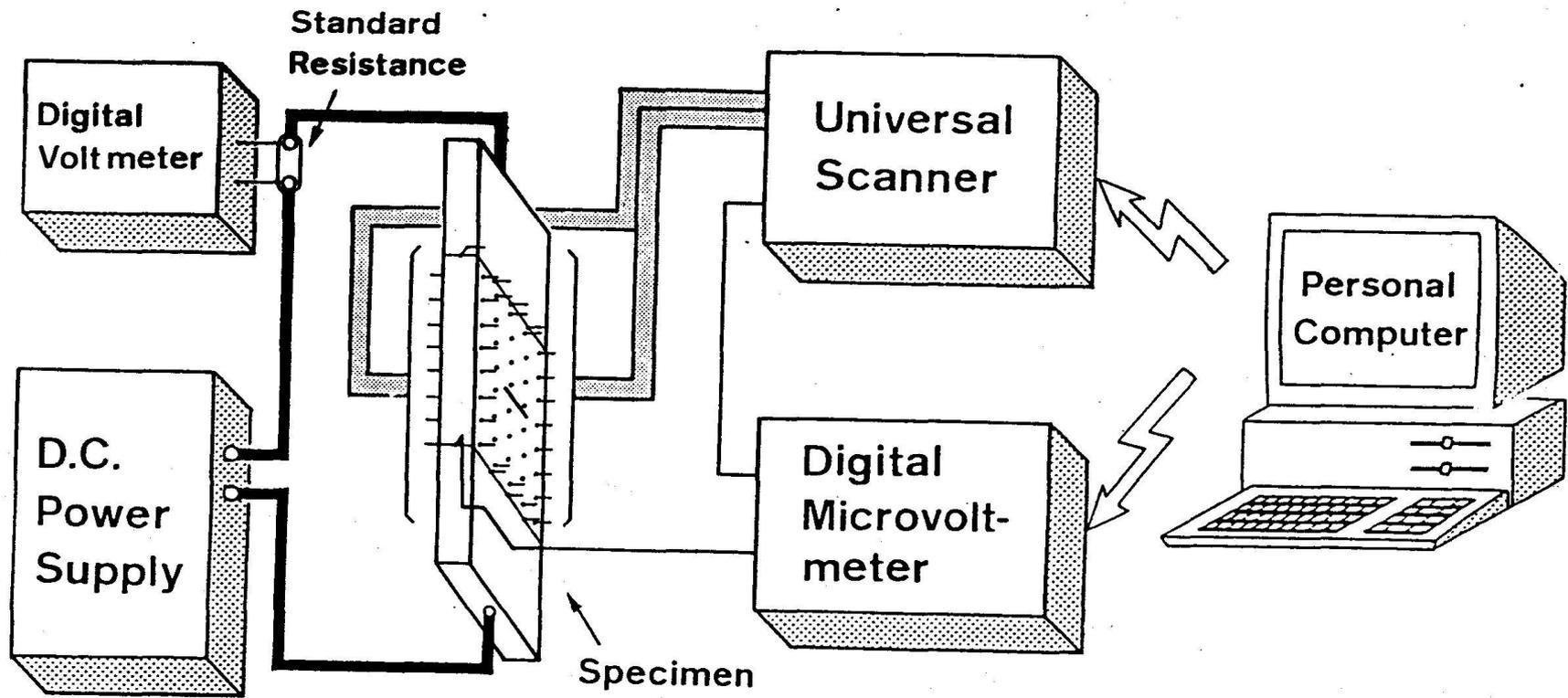
き裂存在面が未知の場合に対して、5通りの電流負荷に対する側面上の電気ポテンシャル分布から、境界残差最小化法によりき裂同定を行った結果です。残差が小さいき裂「1」は、真のき裂(破線)の近くに位置しています。

- マルチ電流負荷方式  
(5通りの電流負荷採用)



3次元表面き裂を、表面上の電気ポテンシャル分布から同定する実験を行いました。

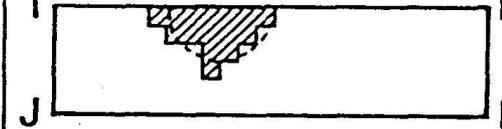
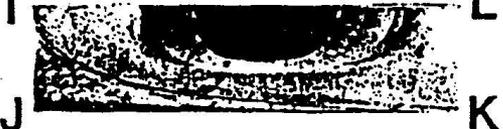
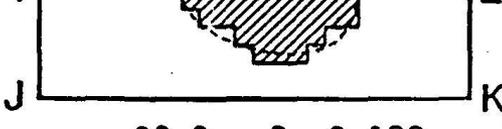
## 3次元表面き裂の同定



# 3次元表面き裂の同定結果

境界残差最小化法によりき裂同定を行った結果です。背面の電気ポテンシャル分布を使う場合にも、き裂存在面の高さとき裂形状が、よく推定できています。

久保・阪上・ほか, 機論A, 54-498 (1988), p.218 より転載

Actual Crack Shape	Cracks Estimated by Electric Potential CT Method	
	(i) Using Front and Back Side Potential Data	(ii) Using Back Side Potential Data
<p>(a) Semi-Circular Crack</p>  <p><math>z_c=42.0</math>   <math>S_c=0.101</math></p>	 <p><math>z_c=42.0</math>   <math>S_c=0.104</math></p>	 <p><math>z_c=42.0</math>   <math>S_c=0.104</math></p>
<p>(b) Semi-Elliptical Crack</p>  <p><math>z_c=47.8</math>   <math>S_c=0.144</math></p>	 <p><math>z_c=48.0</math>   <math>S_c=0.153</math></p>	 <p><math>z_c=50.0</math>   <math>S_c=0.160</math></p>
<p>(c) Asymmetrical Crack</p>  <p><math>z_c=32.2</math>   <math>S_c=0.192</math></p>	 <p><math>z_c=32.0</math>   <math>S_c=0.188</math></p>	 <p><math>z_c=32.0</math>   <math>S_c=0.188</math></p>

電気ポテンシャルCT法によるき裂同定の研究は、10年早ければ失敗していたと思われる。ちょうど、計測技術と計算技術がともにタイミングよく向上していたという幸運がありました。

研究が10年早かったら失敗していた？

計測： 電気ポテンシャル計測技術  
 $\mu V$ ,  $nV$ オーダーの精度

計算： 高精度計算技術  
境界要素法

X線CT法の成功の秘訣は何でしょう。原理的にX線が直進するため逆解析が比較的簡単であったこととともに、医療用に使うことによる計算コストを上回るメリットの大きさがあげられます。

## X線CTはなぜ成功

原理面： X線の透過性、直線性

費用対効果： コンピュータ負荷大、  
高額でも対応可

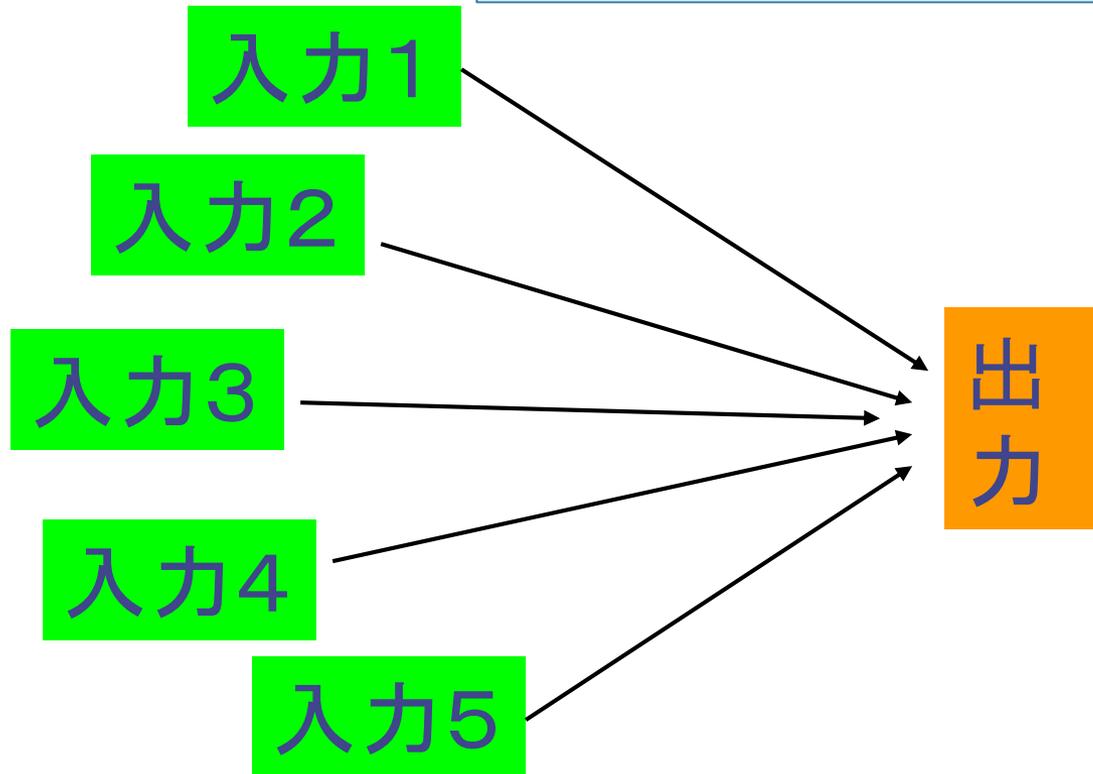
### 3. 逆問題の分類

逆問題とは何か？

•逆？

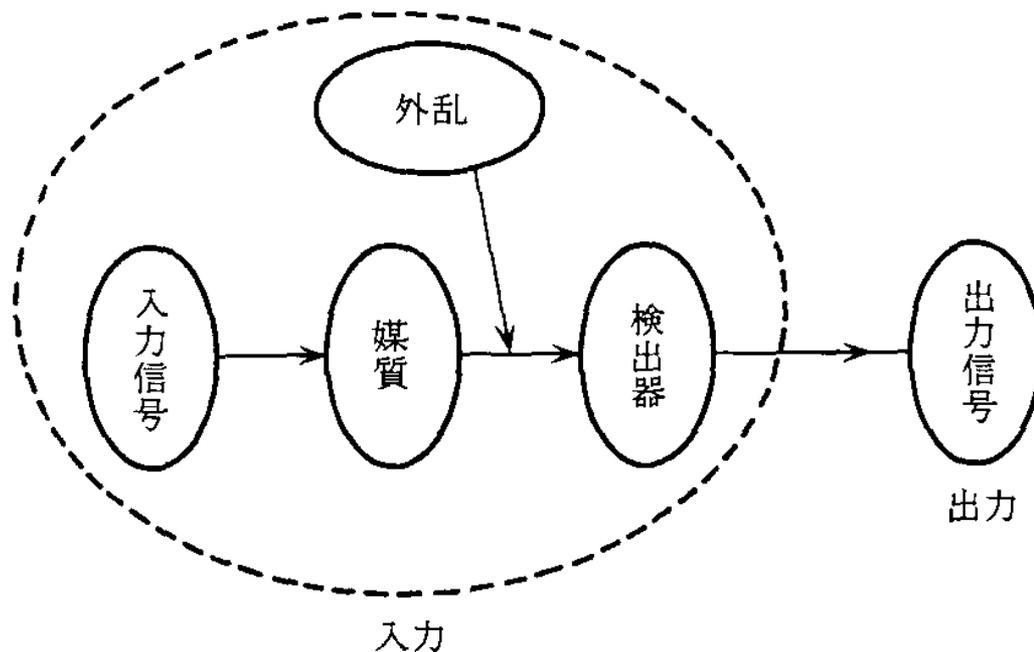
電気ポテンシャルCT法の研究が順調に進んでいったとき、逆問題に関する総説をJSME Int.J.に書くよう依頼がありました。このときに、逆問題について改めて考え直し、逆問題の分類を試みました。

順問題を考えたとき、出力を出すための入力の一つではなく、多くあります。出力から入力のいずれかを推定するものも逆問題になると考えました。これが逆問題の分類につながりました。



# 逆問題とは何か？

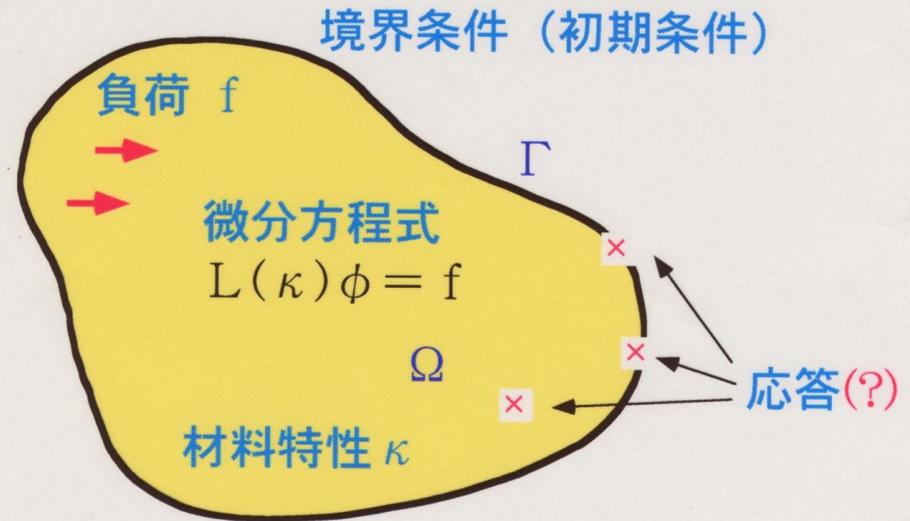
たとえば出力信号は、入力信号だけでなく、媒質、検出器さらには外乱などにより決まります。これらすべてを入力と考えると、出力信号から入力信号を推定するものだけでなく、媒質や外乱を推定するものも逆問題になります。



# 順問題

- 順解析

場の解析を考えてみます。場の解析には、領域と境界、支配方程式、境界条件と初期条件、負荷、材料特性が必要です。これらすべてが入力になります。

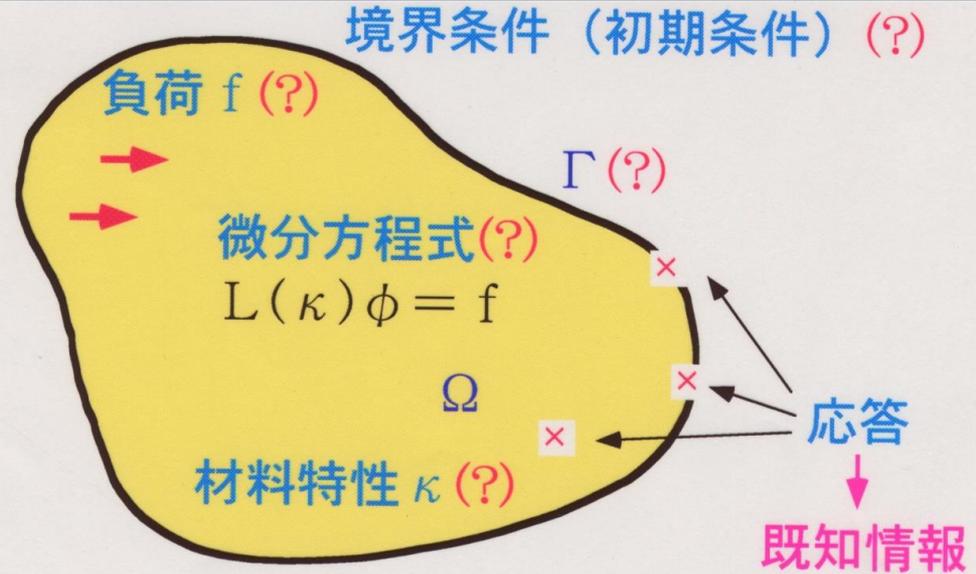


- 対象としている領域  $\Omega$  とその境界  $\Gamma$  の位置と形状
- 物理量  $\phi$  に関する場の支配方程式 ( $L(\kappa)\phi = f$ )
- $\phi$  およびその微係数に関する境界条件 (もし必要があれば初期条件も含む)
- 負荷  $f$
- 支配方程式に含まれる材料特性  $\kappa$  の分布

場の逆問題には、入力に対応して、領域と境界を推定するもの、支配方程式を推定するもの、境界条件や初期条件を推定するもの、負荷を推定するもの、材料特性を推定するものがあります。

# 逆問題

- 逆解析



- (A) 領域 $\Omega$ の形状を求める問題, 物体内にある未知境界を同定する問題 (境界/領域逆問題)
- (B)  $\phi$ の場を支配している微分方程式を求める問題 (支配方程式逆問題)
- (C) 境界 $\Gamma$ の境界値, 領域 $\Omega$ 内の初期値を求める問題 (境界値/初期値逆問題)
- (D) 領域 $\Omega$ の内部で作用している負荷 $f$ を求める問題 (負荷逆問題)
- (E) 領域 $\Omega$ の内部における材料特性 $\kappa$ を推定する問題 (材料特性逆問題)

JSME Int.J.の総説で行った分類は、多くの分野で意外と使えることが分かりました。国際的にも評価されました。そのようなときに逆問題の本の執筆依頼が入りました。

JSME International Journal  
Review 依頼  
1988年 テーマ： 逆問題

固体力学・材料力学に関わる逆問題の総説  
逆問題の分類  
意外と使える

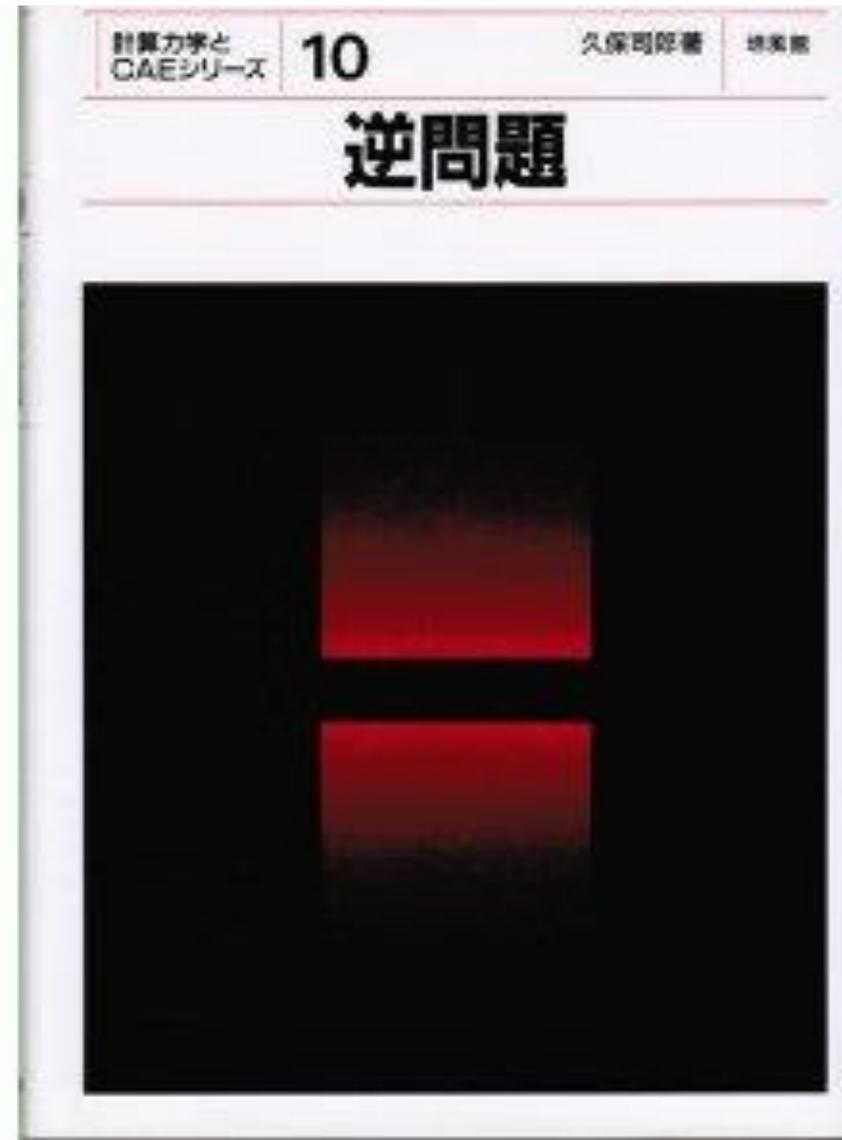
G.S. Dulikravich(Int. J. Sci. Eng., Editor) 他が引用

1992年5月 「逆問題」、計算力学とCAEシリーズ、培風館

逆問題の本の執筆は全く進みませんでした。次々に新しい研究成果が出てくるからでもあります。しかし、培風館の担当者が持参した「近刊 逆問題」のチラシに退路を断たれ、一気に書き上げました。

## 「逆問題」、培風館、1992

- 原稿は遅々として進まず。しかし、培風館の担当者には適当に返事
- 1991.4 「近刊 逆問題」のチラシで退路を絶たれ
- 田中正隆先生「本を書く事は、恥をかくこと」で観念



# 4. 逆問題の特性と解析手法

## 逆問題の不適切性

逆問題では、出力から入力を推定する性格上、順問題にはない不適切性が表面化することがよくあります。すなわち、出力を満たす解が無いかもしれないこと、解が一つとは限らないこと、さらに出力のわずかな変化により解が大きく変化し不安定になることです。

?

- ☆ 解はある？（解の存在性）
- ☆ 解は一つだけ？（解の一意性）
- ☆ データが少し変わっても解は大きくは変わらない？（解の安定性、連続性）

適切性

3条件を全て満足  
**well-posedness**

不適切性  
(非適切性)

条件のどれかが欠けている  
**ill-posedness**

逆問題は通常 不適切

## 不安定性

入力 $z$ と出力 $u$ の関係が上の式のように与えられることがよくあります。入力 $z$ に微弱な振動成分が混入しても出力は殆ど変化しません。このことは出力 $u$ がわずかに変化したとき、対応する入力が大きく変動し、不安定になることを表しています。

応答 $u(x)$ より入力 $z(s)$ を推定

$$\int_0^{\pi} A(x, s) z(s) ds = u(x)$$

入力 $z(s)$ に微弱なゆらぎが混入

$$\int_0^{\pi} A(x, s) [z(s) + b \sin ns] ds \rightarrow u(x)$$

応答が

$$v(x) = u(x) + b \int_0^{\pi} A(x, s) \sin ns ds$$

のとき、解は

$$z(s) + b \sin ns$$

# 逆解析の手法

## X線CT

線形 ⇒

連立一次方程式

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow \\ I_i \Rightarrow & \begin{array}{|c|c|} \hline m_{11} & m_{12} \\ \hline m_{21} & m_{22} \\ \hline \end{array} & \Rightarrow I_o \\ \Rightarrow & & \Rightarrow \\ & \downarrow & \downarrow \\ & I_o = m_{11} m_{12} I_i & \end{array}$$

logをとると  $M_{ij} = -\log m_{ij}$ として

$\log(I_{oi}/I_o) = M_{11} + M_{12}$  未知量に関する連立一次方程式

X線CTの簡単な例として、縦横2×2のマスごとに異なる吸収能 $m$ を推定することを考えます。

X線を横方向に照射すると、上下二つの観測から、 $m$ に関する二つの式が得られます。 $m$ の対数 $M$ を使うと、一次方程式が得られます。

# 逆解析の手法

## X線CT

X線を横方向に照射すると、上下二つの観測から二つの式が得られます。同様に縦方向の照射から二つの式が得られます。これら4つの式を連立して解けば、4個の吸収能が求められそうです。しかし4式は完全には独立でないため、そのままでは解けません。斜めの照射や補助情報が必要です。このように、逆問題には落とし穴がよくあります。

### 連立一次方程式

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow \\ I_i \Rightarrow & \begin{array}{|c|c|} \hline m_{11} & m_{12} \\ \hline m_{21} & m_{22} \\ \hline \end{array} & \Rightarrow I_o \\ \Rightarrow & & \Rightarrow \\ & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

### 横方向

$$M_{11} + M_{12} = A$$

$$M_{21} + M_{22} = B$$

### 縦方向

$$M_{11} + M_{21} = C$$

$$M_{12} + M_{22} = D$$

# 逆解析の基礎式

線形 ⇒

連立一次方程式

非線形 ⇒

非線形方程式

観測結果から未知パラメータに関する連立一次方程式が得られることもあります。

多くの場合は、非線形方程式が得られます。

積分方程式, 有限要素法, 境界要素法, 差分法

重力場の問題

物質の密度  $z$  と重力の不均一性  $\Phi$  との関係

$$\int_{\Omega} k(x, s)z(s)ds = \Phi(x) \quad (2)$$

$k$ : 核関数,  $\Omega$ : 積分領域

有限要素離散化 (連続体の変形の問題)

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{V}\} = \{\mathbf{R}\} \quad (3)$$

$\{\mathbf{V}\}$ ,  $\{\mathbf{R}\}$ : 節点変位ベクトル, 節点力ベクトル

$[\mathbf{K}]$ : 剛性マトリックス

順問題:

$[\mathbf{K}]$ : 既知

各節点で  $\{\mathbf{V}\}$ ,  $\{\mathbf{R}\}$  のいずれかが既知 0

境界値逆問題: ある境界節点で  $\{\mathbf{V}\}$  と  $\{\mathbf{R}\}$  が未知

材料特性逆問題:  $[\mathbf{K}]$  に含まれる材料特性が未知

領域/境界逆問題:  $[\mathbf{K}]$  評価に必要な領域形状が未知

未知入力  $z$  と出力  $\Phi$  の関係, (写像:  $A$ )

$$Az = \Phi \quad (4)$$

線形問題 (未知変数:  $\{\mathbf{p}\}$ , 出力:  $\{\mathbf{g}\}$ )

$$[\mathbf{D}]\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{g}\} \quad (5)$$

非線形系 (未知パラメータ:  $\{\mathbf{p}\}$ , 出力:  $\Phi$ )

$$f(\{\mathbf{p}\}) = \Phi \quad (6)$$

# 代表的な逆解析手法

- 線形

観測結果を未知パラメータと結びつける連立一次方程式が得られても、そのまま解ける訳ではありません。未知パラメータより式の数の方が多い場合には、解を式に代入したときの残差を最小化する方法がよく使われます。式の数の方が少ないと、式を満足する解は無数にあります。このため解のノルムを最小とする方法がよく使われます。特異値分解は、誤差の拡大率を評価し、誤差拡大につながる解のモードを除去できる方法として、広く使われるようになりました。

$$\begin{array}{ll} \text{連立一次方程式} & [D]\{p\}=\{g\} \\ \{p\}?(未知) & \{g\} \leftarrow \text{観測} \end{array}$$

最小二乗解 式の残差が最小

ノルム最小解 解が無数. ノルム最小の解を採用

**特異値分解(SVD)** マトリックスの特異値より誤差の

**拡大率(条件数)**を計算.

誤差が拡大される解のモードを除去

特異値分解は、主成分分析(PCA)、特徴抽出、データ圧縮とも関連。

# 代表的な逆解析手法

- 非線形

観測結果と未知パラメータの関係式が非線形の場合には、未知パラメータを仮定して得られた応答と観測された応答の間で残差を評価し、それを最小化する方法が一般的に使われています。この方法によれば、残差を限りなく小さくすると、解が発散します。チホノフの方法では、残差に正則化項としてノルムなどを加えたものを最小化し、解の発散をおさえます。

$$\begin{array}{ll} \text{非線形方程式} & f(p)=\Phi \\ p?(未知) & \Phi \leftarrow \text{観測} \end{array}$$

$$\text{残差最小化法} \quad \Sigma(f(p)-\Phi)^2 \Rightarrow \text{最小}$$

$$\text{チホノフの方法} \quad \Sigma(f(p)-\Phi)^2 + \alpha \|p\|^2 \Rightarrow \text{最小}$$

振動する解は除外される

# 随伴方程式と境界積分

- 支配方程式

$$L\phi = p$$

- 境界積分方程式

$$\int_{\Omega} (L\phi)\psi d\Omega = \int_{\Omega} (L^*\psi)\phi d\Omega + \int_{\Gamma} g(\phi, \psi) d\Gamma$$

- 随伴方程式

$$L^*\psi = 0$$

$$\int_{\Omega} p\psi d\Omega = \int_{\Gamma} g(\phi, \psi) d\Gamma$$

逆問題の解析には、随伴方程式を使うことがあります。たとえば、ポアソン方程式の負荷項 $p$ の分布を求めることを考えます。この問題に対し、領域積分を境界積分と結びつける、境界積分方程式が成立します。随伴方程式を満足する解を使うと、 $p$ の分布に関する領域積分を境界積分で評価する式が得られます。

未知量 $p$ に関する境界積分が成立

# 5. 種々の逆問題解析

- 破壊の発生源の推定
- ピエゾフィルムを用いた欠陥同定
- 赤外線サーモグラフィによる欠陥同定
- 逆問題の数理構造解析
- 過渡的熱応力の最小化
- パイプ外面の温度計測からの内部温度と熱応力の推定
- 固有ひずみ分布の推定
- 発熱源等のソースの推定
- 支配方程式の推定

# AE原波形 解析

破壊が発生するときには、AEすなわち音が出ます。この音は物体内を伝わり検出器に到達するまでに歪んでしまいますが、検出音は元の音に伝達関数をたたみこんだものとして表現できます。このことより、畳み込みの反対であるデコンボリューションを適用すると、検出音からもとの波形を求めることができます。

多数の点で音を検出できれば、破壊の発生時刻、位置だけでなく、割れの面の向きと割れの方向を知ることができます。

破壊による発生音  
AE(Acoustic Emission)  
の推定

deconvolution

# 阪神大震災 活断層と地震

地震は、破壊の大規模なものです。

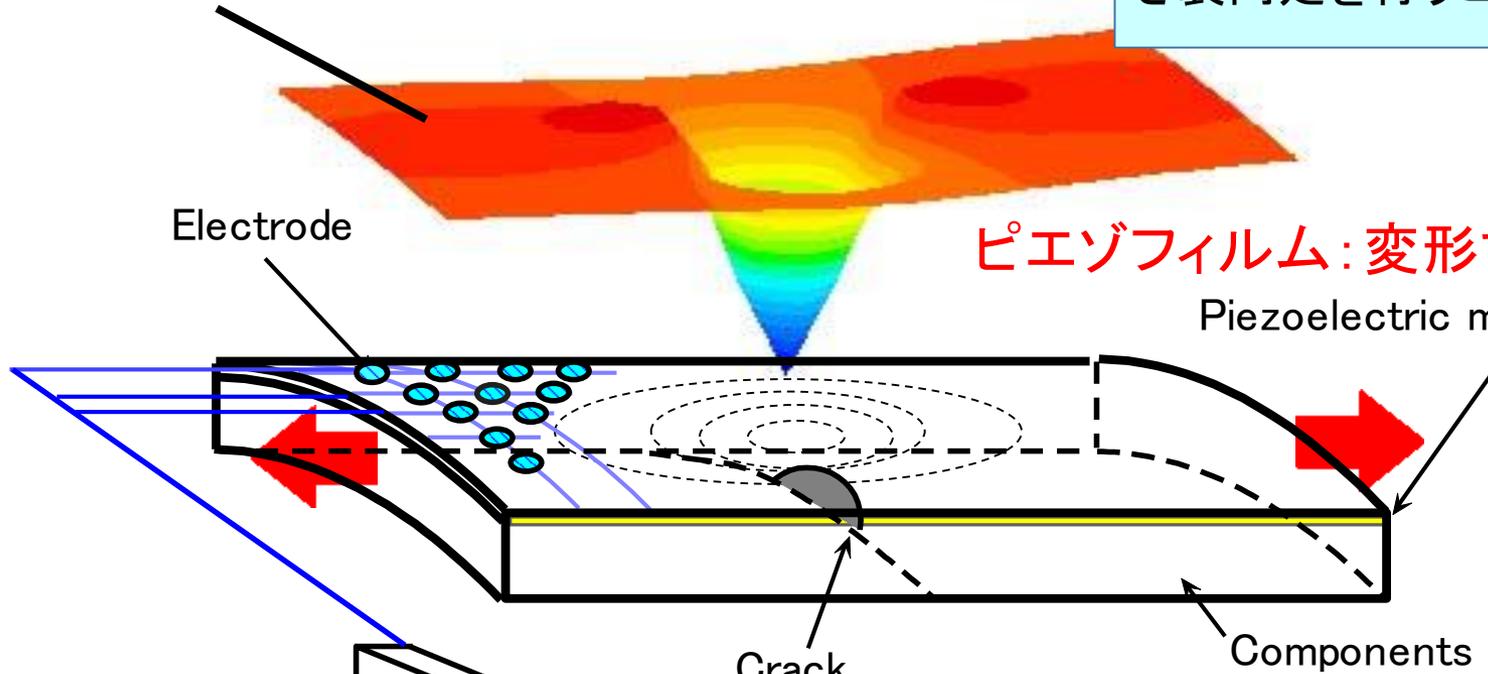
阪神淡路大震災のときには、多くの観測点で地震波が観測されています。これらを総合することにより、地震の発生がいつどこか、すべりがどのように進んでいったのかを推定することができます。

# 圧電フィルムを用いた欠陥同定

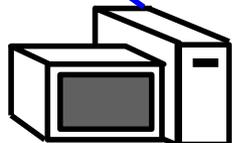
## 受動型電気ポテンシャルCT法

電気ポテンシャル法では通電が必要でしたが、物体の表面に圧電フィルムを貼付すると、ひずみに対応して電気ポテンシャルが受動的に表れます。この分布を利用してき裂同定を行うことができます。

Electric potential distribution



圧電フィルム：変形すると電位発生

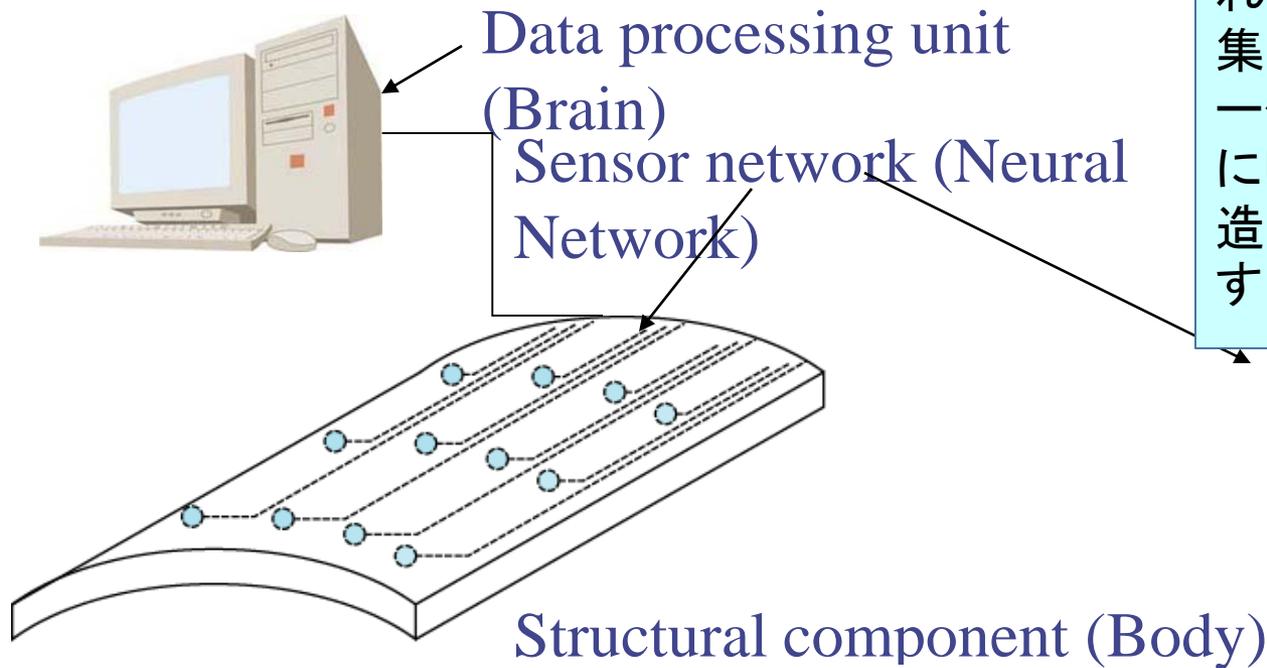


Data processing

Inverse method

Crack identification

# Background(2): Smart Structure



ピエゾフィルムにより得られる応答を多くの点で収集し、それらの情報にデータ処理を適用できるようにした、一種のスマート構造を構築することができます。

## Characteristics

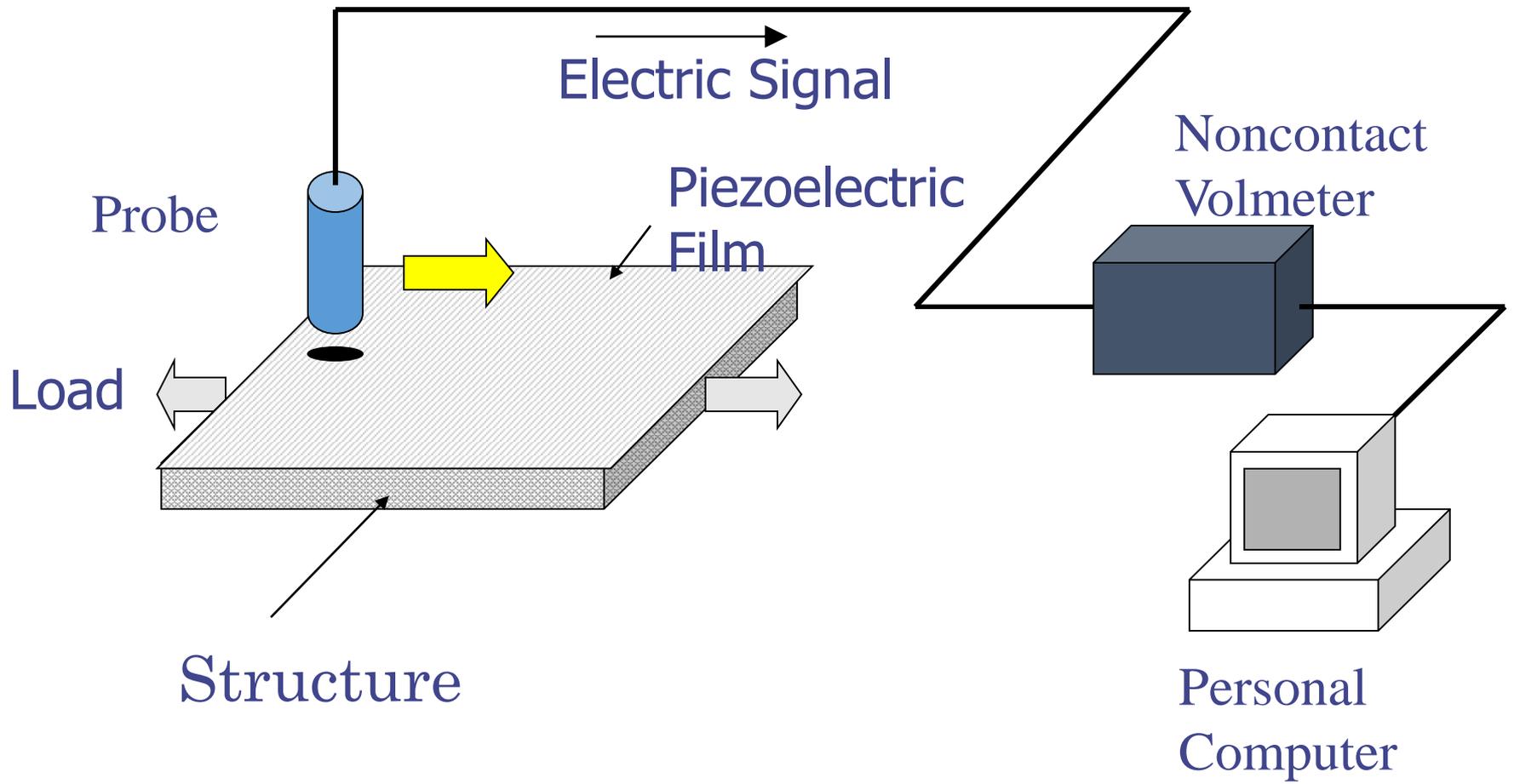
- Electro-Mechanical Coupled Effect
- Light, Flexible

ピエゾフィルム上の電気ポテンシャル分布の計測には非接触型プローブが適しています。

# 受動型電気ポテンシャルCT法

Shiozawa-Kubo-Sakagami

非接触型プローブ使用

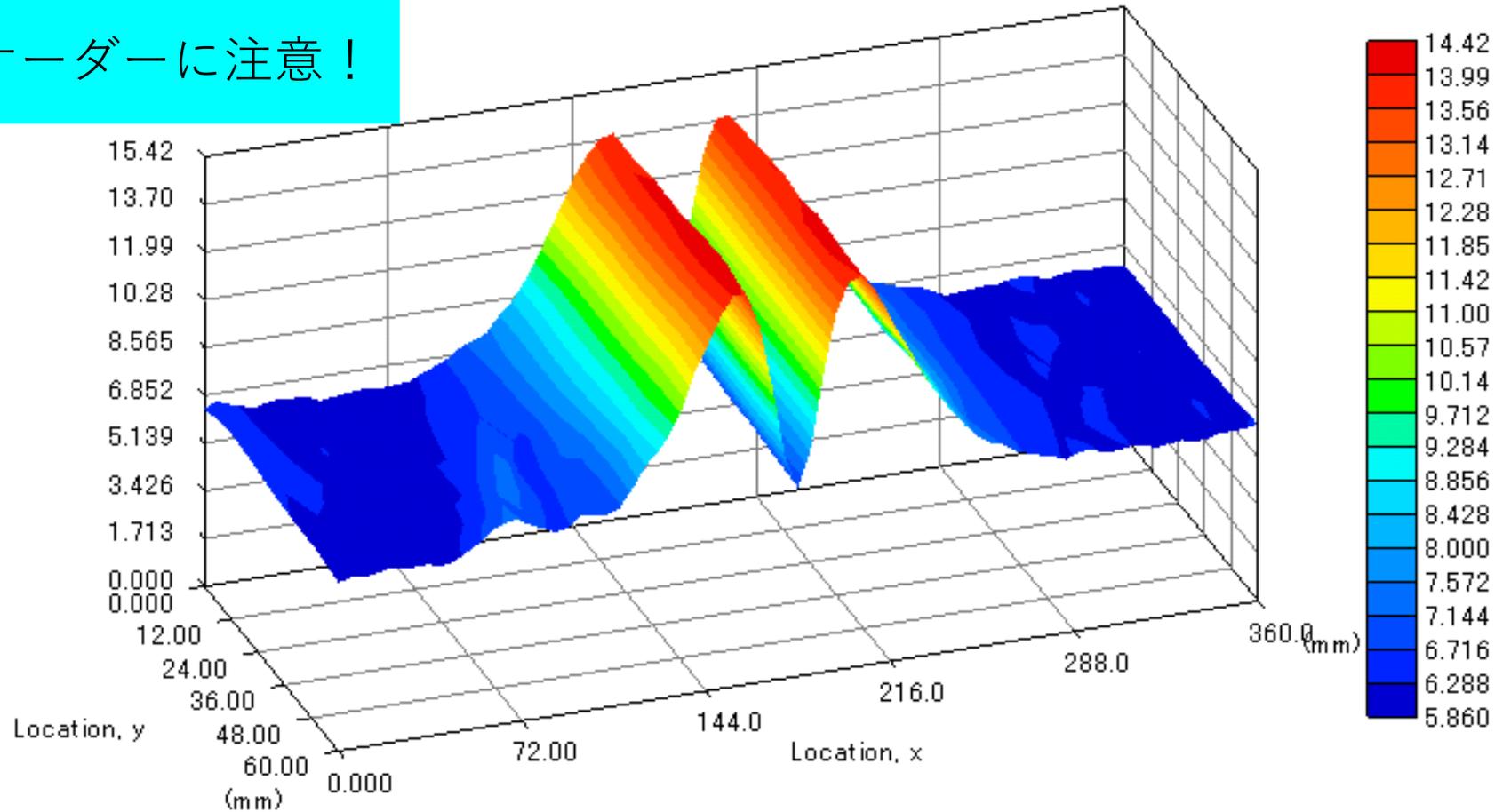


能動型電気ポテンシャル法では $\mu\text{V}$ の計測が必要でしたが、受動型ポテンシャル法ではVオーダーの計測値が得られます。piezofilm上に、き裂の位置と大きさに対応した特徴的な分布が観測されます。

## 電気ポテンシャル測定結果

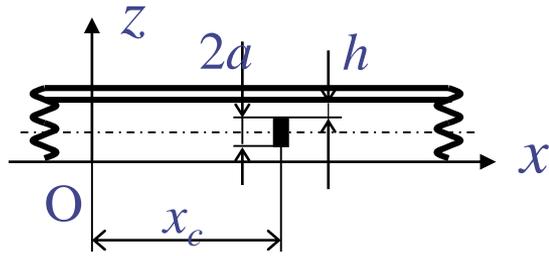
Non-Contact Type Method  $(a, h) = (3, 2)$

オーダーに注意！



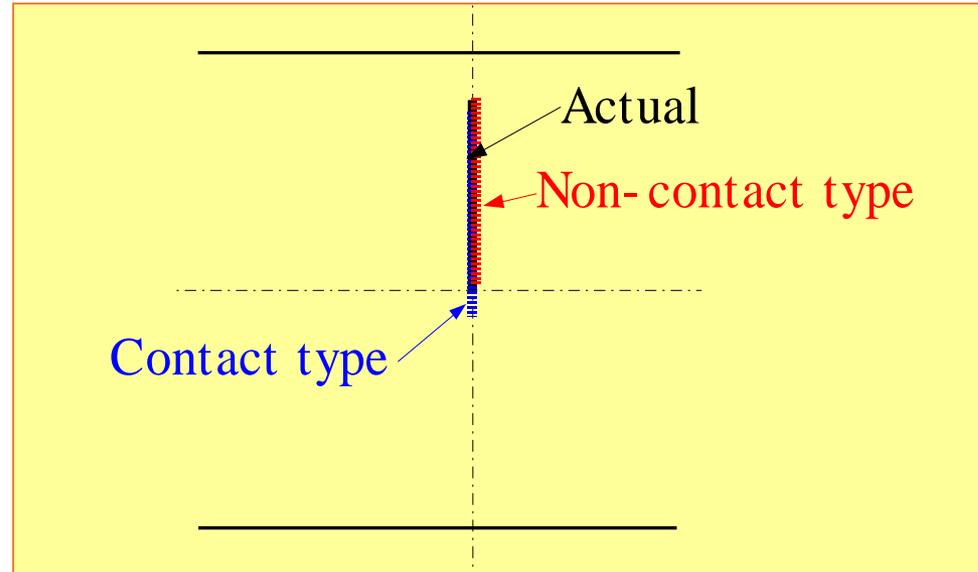
# き裂パラメータの推定結果

受動型ポテンシャル法により、貫通き裂の位置と大きさがよく推定できています。



Specimen 1 [(a, h)=(2, 1)]

Shiozawa, Kubo and Sakagami, JSME Int. J. Ser. A, 47-3 (2004), p.419 より転載

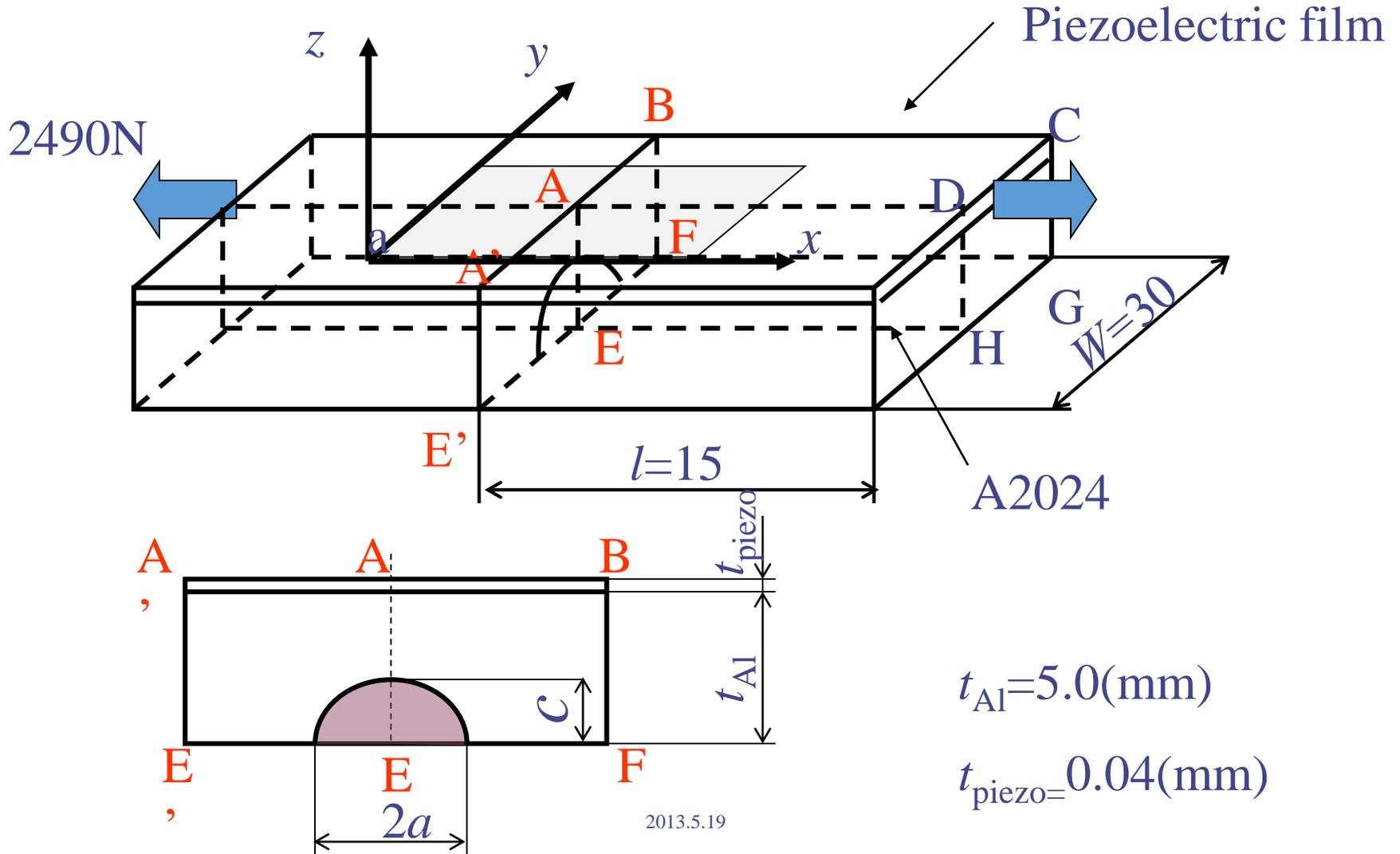


		Crack parameters		
		$a$	$h$	$x_c$
Contact type	Actual	2	1	10.5
	Estimated	2.150	1.250	10.5007
	Error (%)	<u>7.102</u>	<u>25.02</u>	<u><math>0.67 \times 10^{-2}</math></u>
Non-contact type	Actual	2.0	1.0	18.0
	Estimated	1.964	0.9485	18.08
	Error (%)	<u>1.794</u>	<u>5.150</u>	<u>0.4600</u>

受動型ポテンシャル法を表面き裂の同定に適用しました。

# 表面き裂の同定

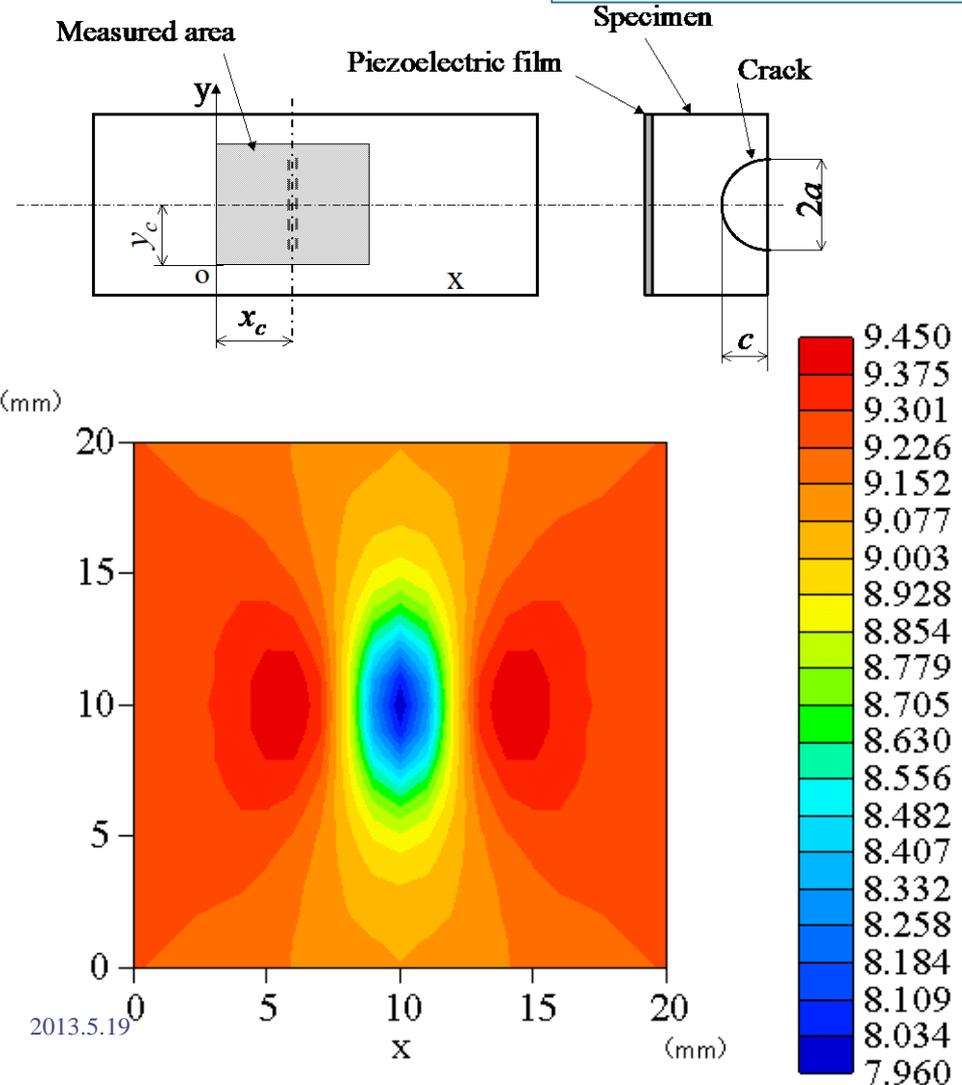
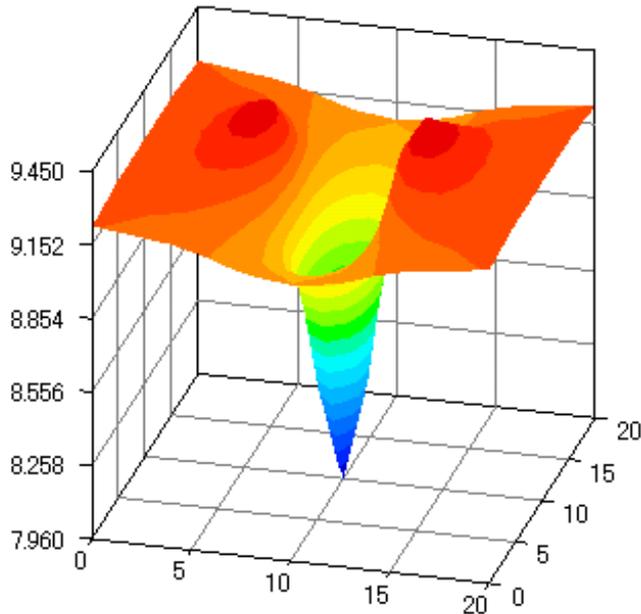
Shiozawa, Kubo and Sakagami, JSME Int. J. Ser. A, 49-3 (2006), p.426 より転載



# Electric Potential Distribution for a Specimen with a Surface Crack

表面き裂の背面のピエゾフィルム上のポテンシャル分布の計算結果です。特徴的な分布が現れます。

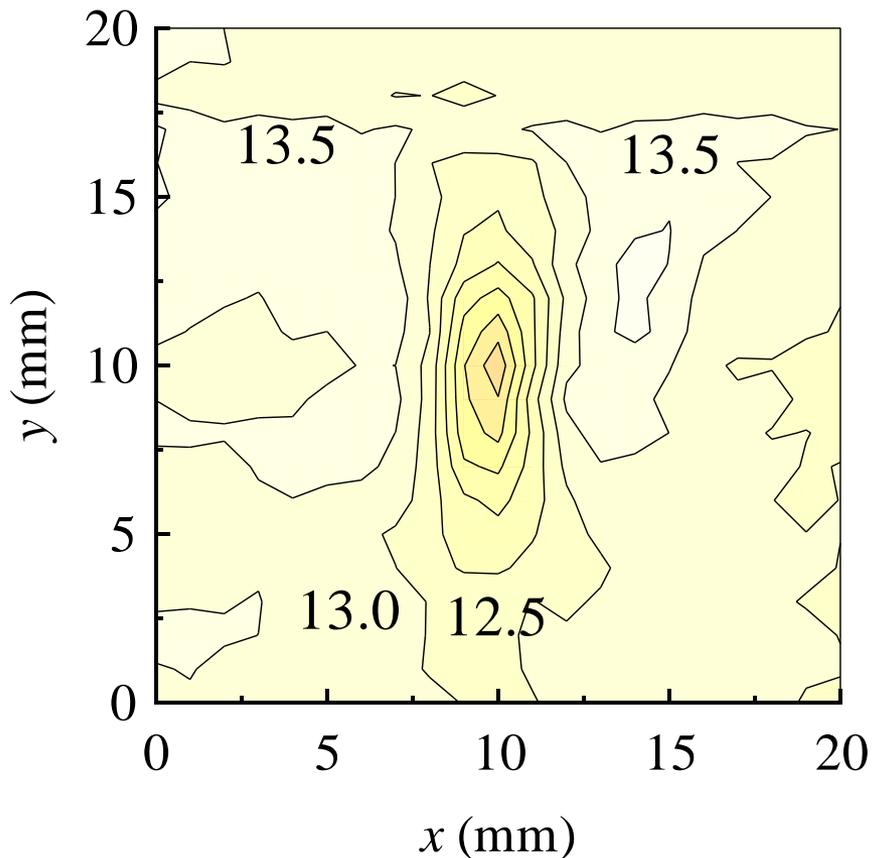
$$(a, c, x_c, y_c) = (2, 2, 10, 10)$$



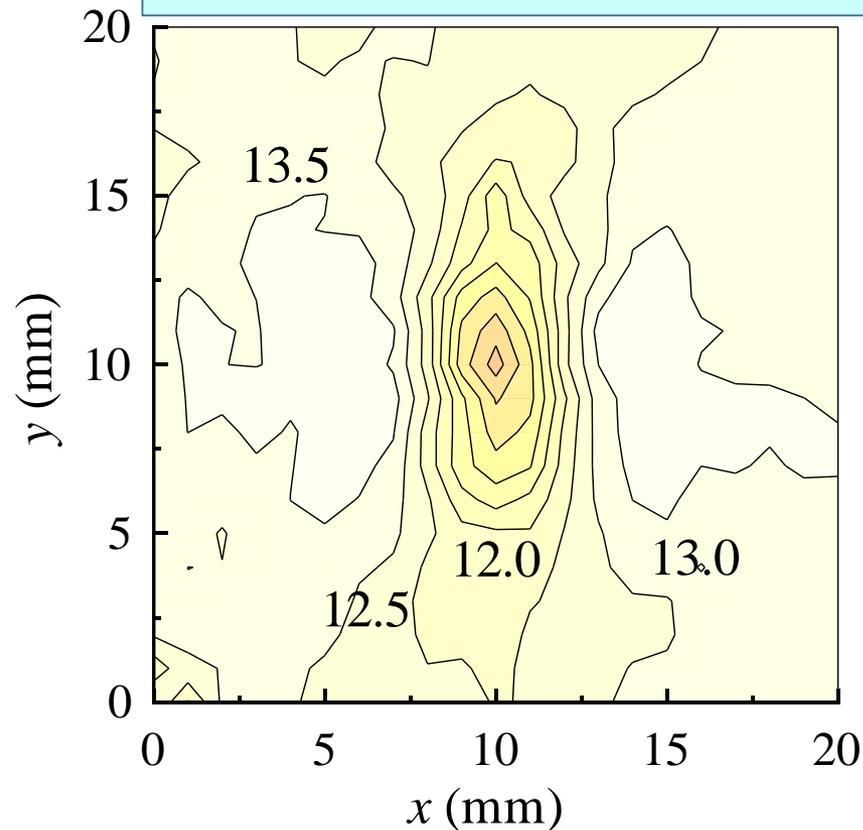
Shiozawa, Kubo and Sakagami, JSME Int. J. Ser. A, 49-3 (2006), p.426 より転載

# ポテンシャル測定結果

表面き裂の背面のピエゾフィルム上で計測されたポテンシャル分布です。計算結果に対応した分布が得られません。残差最小化法により、き裂パラメータが精度よく推定できます。

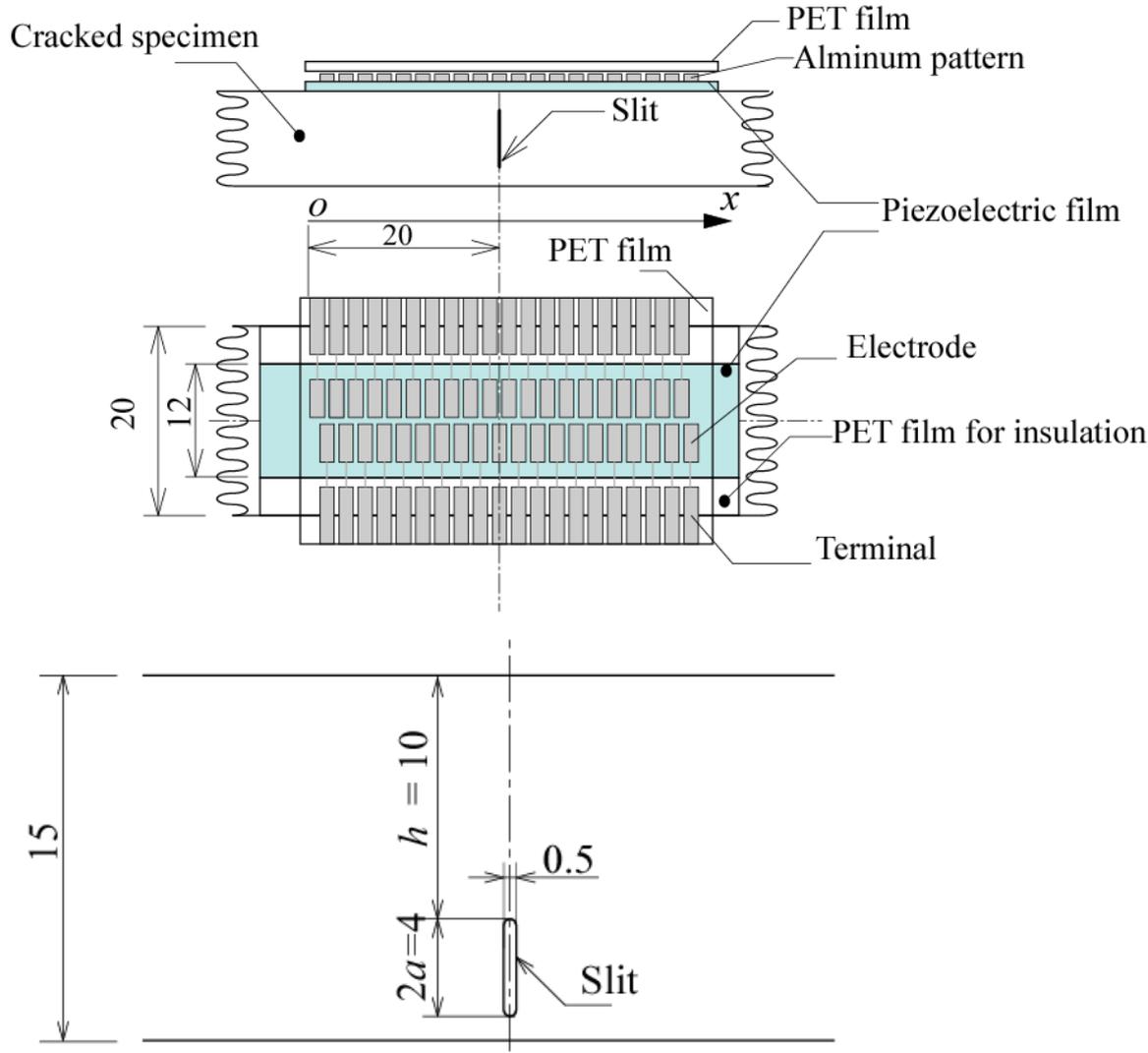


(a) Specimen ①  $(a, c)=(2, 3)$



(b) Specimen ②  $(a, c)=(3, 2)$

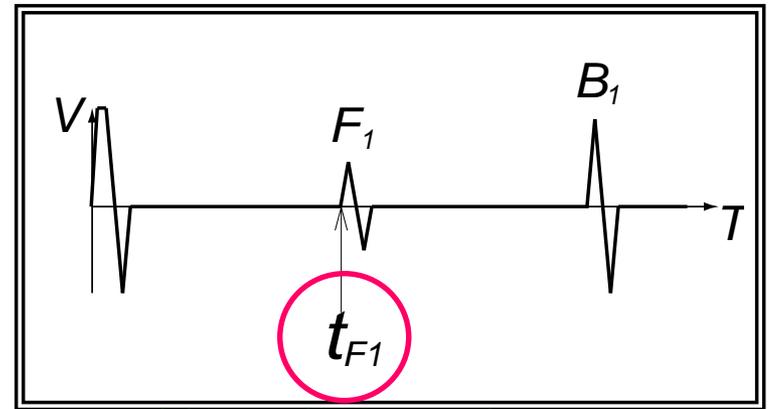
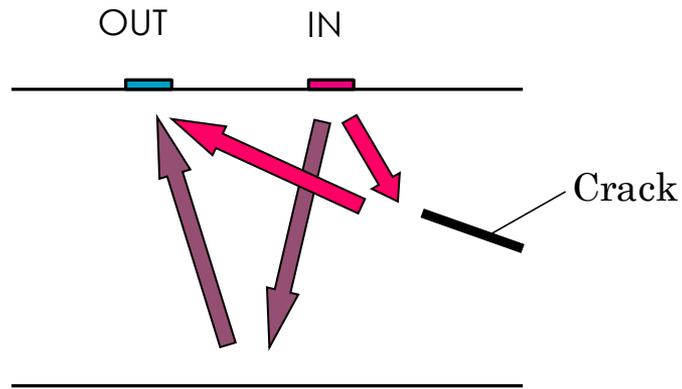
# スマートレイヤを用いた能動型パルスエコー法



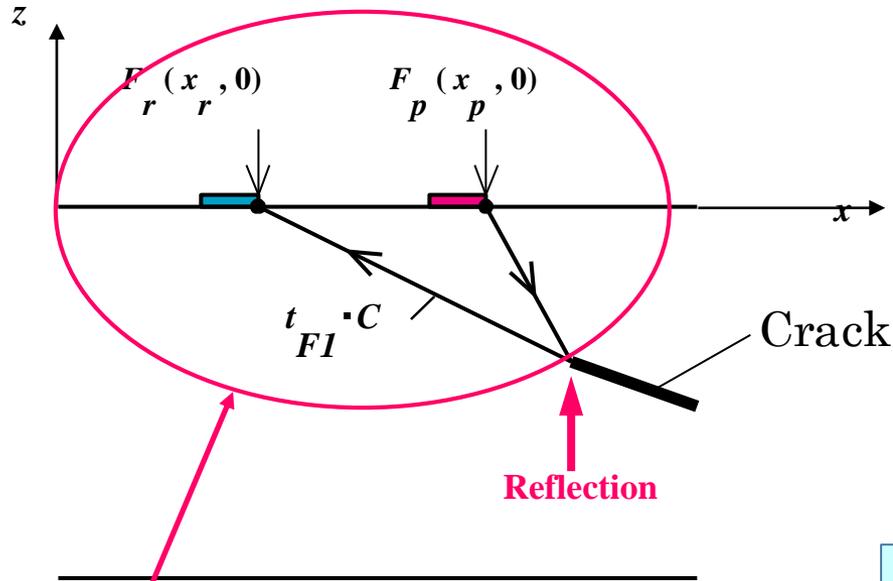
ピエゾフィルムを用いたスマートレイヤーの電極にパルス電圧を印加すると、超音波が発信されます。き裂からの反射波もスマートレイヤーで受信できます。

Details near Defect

# Dual Probe Method



Time-of-flight of a wave reflected by a crack



Wave speed:  $C$

$$\bullet t_{F1} \cdot C$$

Distance: Pulsing electrode – Crack – Receiving electrode

An ellipsoid tangential to crack surface is obtained

Ellipsoids for various combinations of pulsing

超音波の送信と受信の時間差から、送信電極からき裂までの距離とき裂から受信電極までの距離の和が得られます。このことより、送受信電極を極とし、き裂と接する楕円を描くことができます。送受信電極の組合せを変えて楕円を求めれば、き裂の包絡線が得られます。

$$\frac{\left(x - \frac{x_r + x_p}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = \left(\frac{t_{F1} \cdot C}{2}\right)^2, \quad b^2 = \left(\frac{t_{F1} \cdot C}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_p - x_r}{2}\right)^2$$

# 赤外線サーモグラフィを用いた欠陥同定

## Principles of thermographic NDT

内部に欠陥や剥離を有する構造物や壁に熱的負荷を与えると、欠陥部の近くでは熱応答に変化が生じます。構造物等の表面の温度変化を赤外線サーモグラフィで計測することにより、欠陥等の推定ができます。

# 逆問題の数理構造解析

長方形領域のラプラス場を取り上げます。上面の境界条件が未知であるとき、下面でポテンシャル分布と流束分布がともに境界値として与えられているとして、上面の境界値を推定する境界値逆問題の解析が行われています。この問題の条件数(誤差の拡大率)は、領域の縦横比が大きくなると急激に増大します。

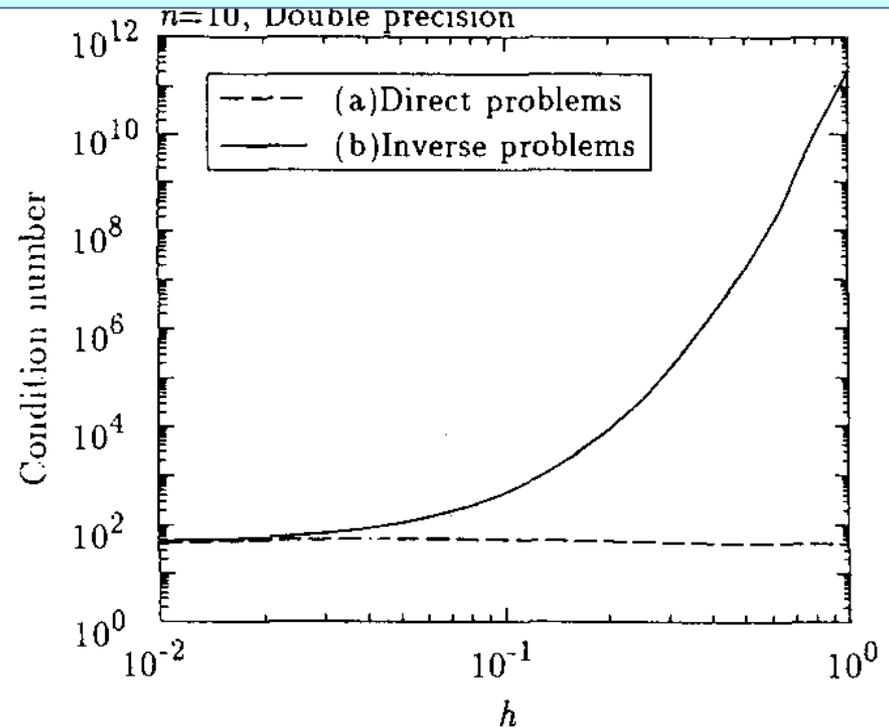
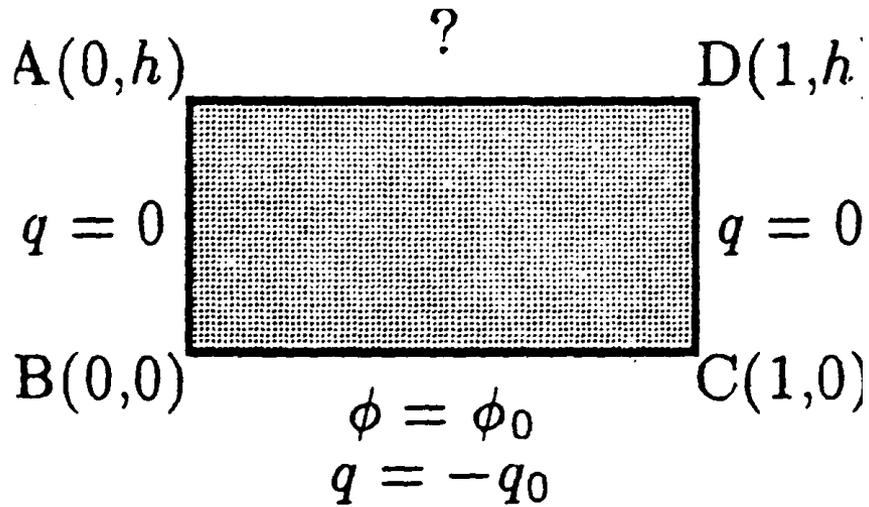


図2 境界値順問題と逆問題に対する条件数の比較

# ラプラス場の境界値推定

条件数を数理解析により予測した結果は、数値解析結果とよく合います。また、数理解析の予想の通り、大きな条件数を与える高次モードが、高次の振動解に対応していることが確認できます。大きな条件数を与えるモードを除去し、ランクを下げることにより、推定結果に与える誤差の影響を低減することができます。

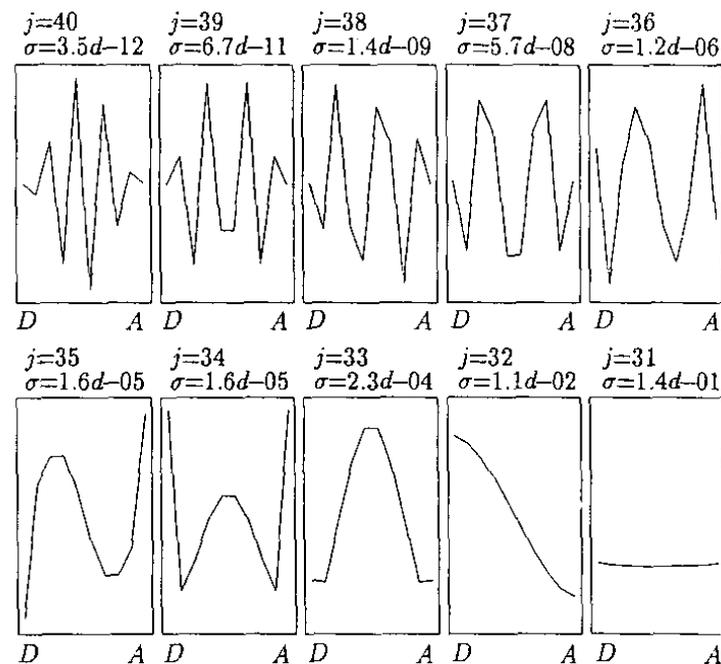
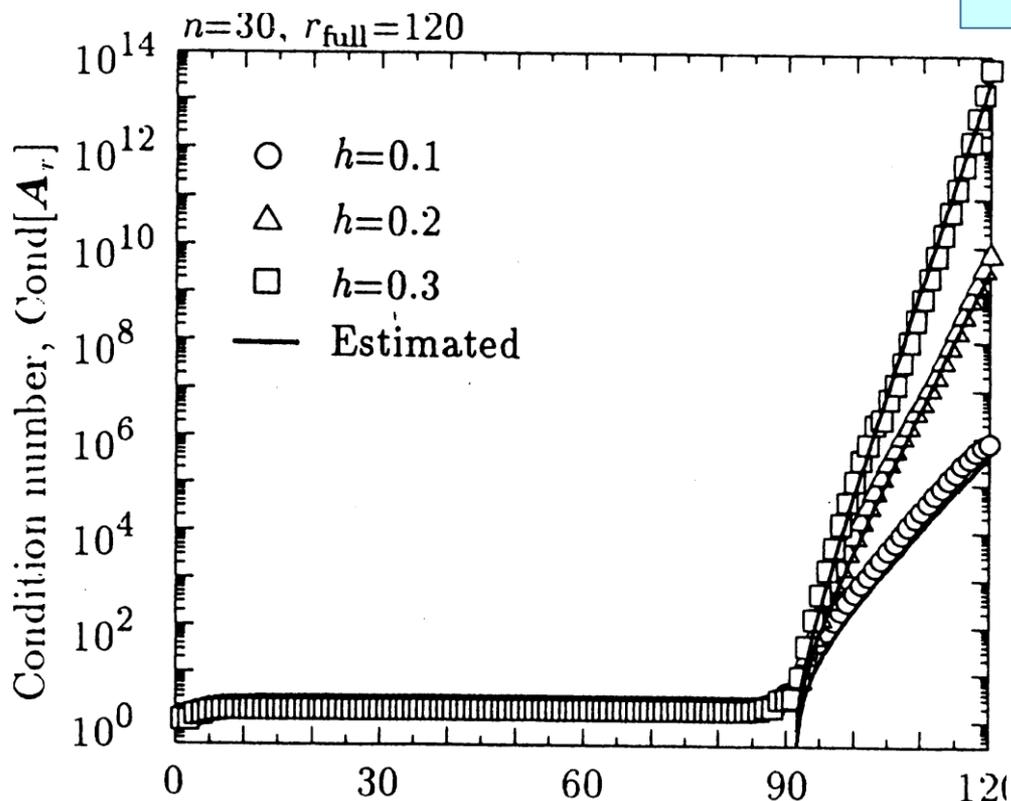
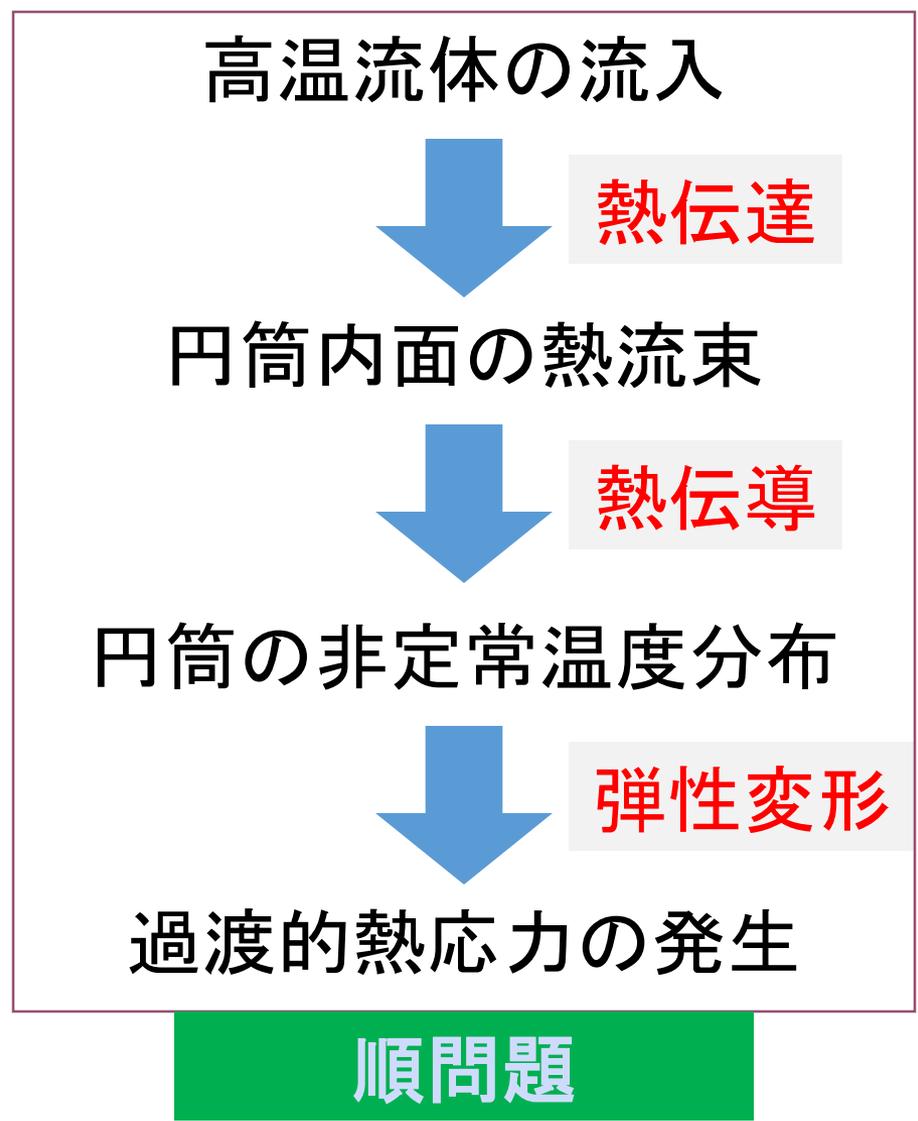


図4 特異値に対応する右特異ベクトル

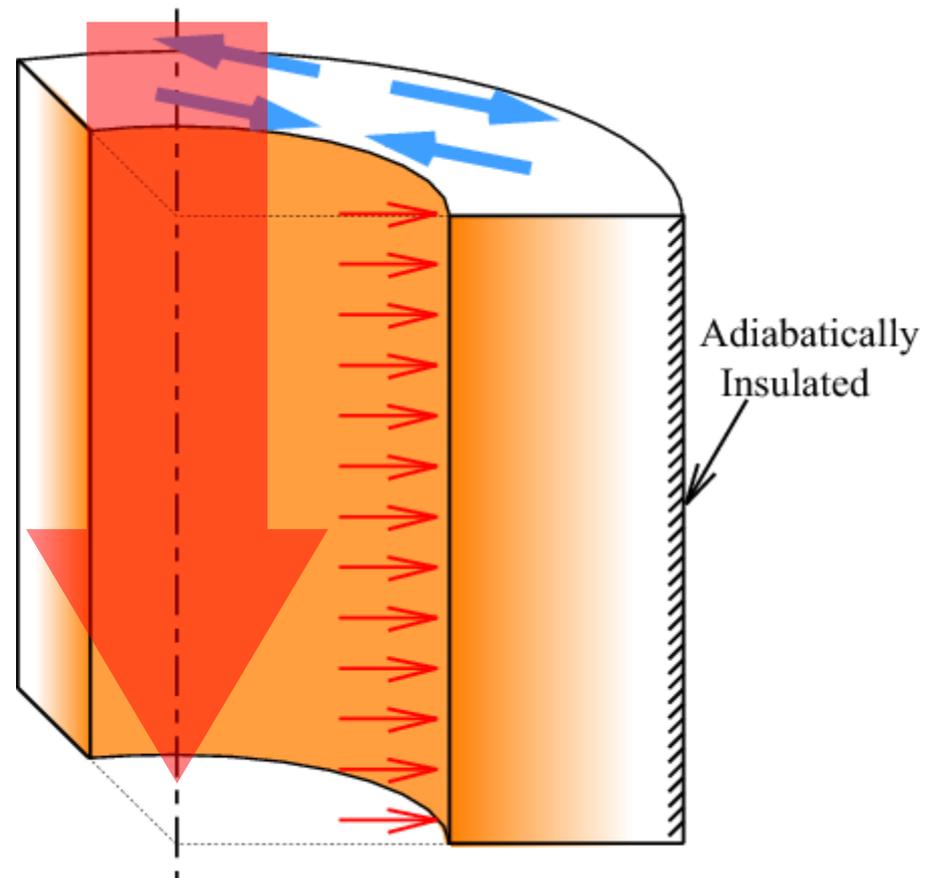
# 過渡的熱応力の最小化

## 低サイクル疲労(機器稼働・停止による疲労)の低減

### 薄肉円筒の熱応力発生過程



高温機器の起動時に流体が流入すると、非定常温度分布が生じ、熱応力が発生します。逆に停止時にも過渡的熱応力が生じます。これらの繰り返しにより低サイクル熱疲労が生じます。流体の温度履歴を制御して、熱応力を低減することも逆問題の一種です。

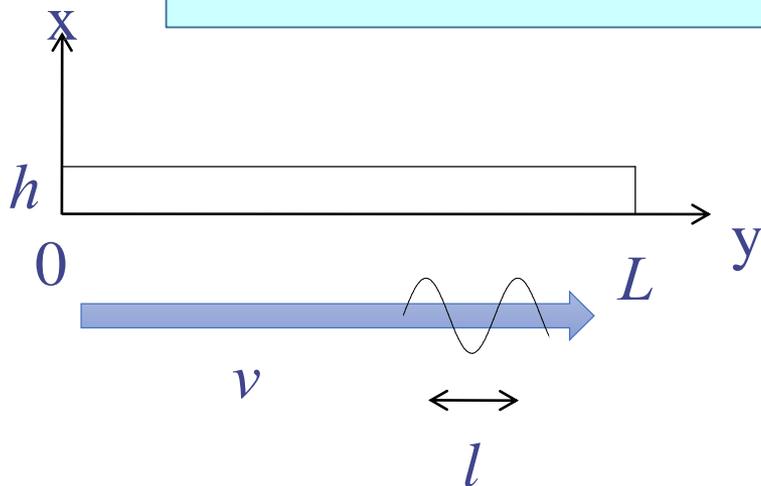


# パイプ外面の温度計測からの内部温度と熱応力の推定 (流体変動による高サイクル熱疲労の監視)

パイプ内部にスラグ流や混相流が流れている場合には、その温度分布の変化を把握するのは困難です。この問題では、内面の温度変化に比べ外面の温度変化は、減少しさらに時間遅れが生じます。そこで、外面の温度変化を周波数分解し、周波数により決まる減少率の逆数をかけ、時間遅れだけ時間を進めることにより内面およびパイプ内の温度変化の推定ができます。

温度  $\phi(x, y, t)$

$$c = 2\pi / l$$



支配方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \kappa^2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)$$

境界条件 ( $x=0$ )  $\phi = A \sin(-cy + vct - fx)$

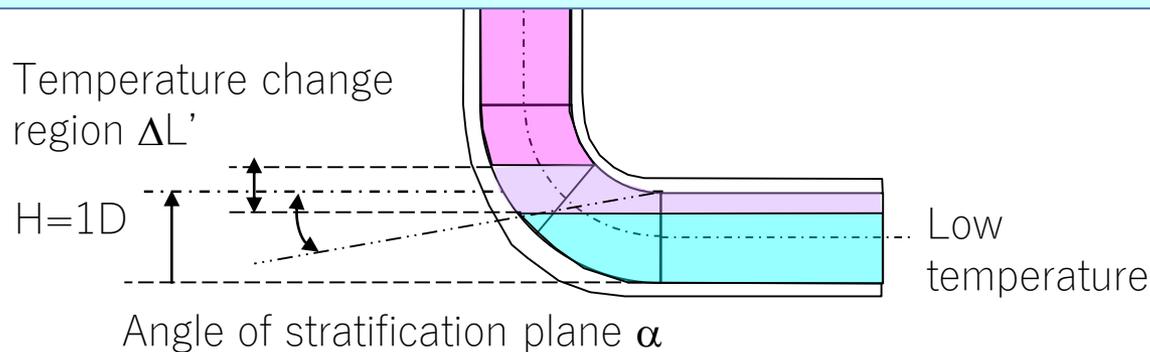
減少率  $R$

$$R = \frac{\text{外面の温度振幅}}{\text{内面の温度振幅}} = \exp \left( -h \sqrt{\frac{c^2 + \sqrt{c^4 + \frac{v^2 c^2}{\kappa^4}}}{2}} \right)$$

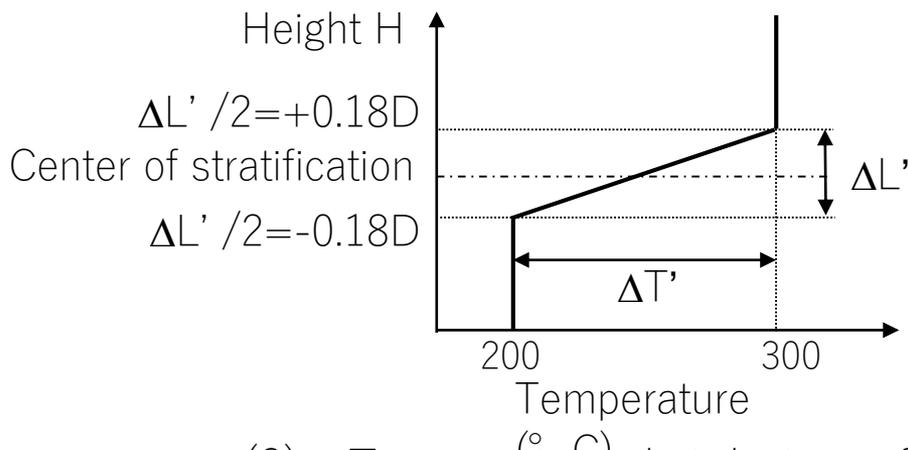
時間遅れ

$$\Delta t = \frac{\Delta t \cdot chl}{\pi \kappa^2 \sqrt{8 \left( c^2 + \sqrt{c^4 + \frac{v^2 c^2}{\kappa^4}} \right)}}$$

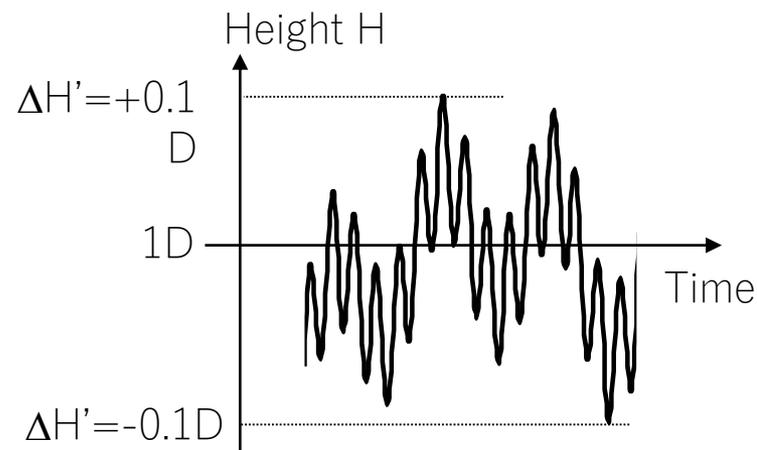
パイプのエルボ部の下部に低温の液体が滞留しており、上部が高温流体が流れるパイプを接続されている場合には、高温流体と低温流体が混ざり合わない、いわゆる熱成層が生じます。高温流体の流動により高温流体が流れ込み、熱成層の界面が変動します。このため、エルボが頻繁に温度変動を受け、高サイクル疲労が生じることがあります。この温度分布の変化を評価するため、外面の温度分布の周波数分解結果を用いることができます。



(1) Average fluid temperature distribution image and notations



(2) Temperature distribution of vertical direction



(3) Time change of center of stratification

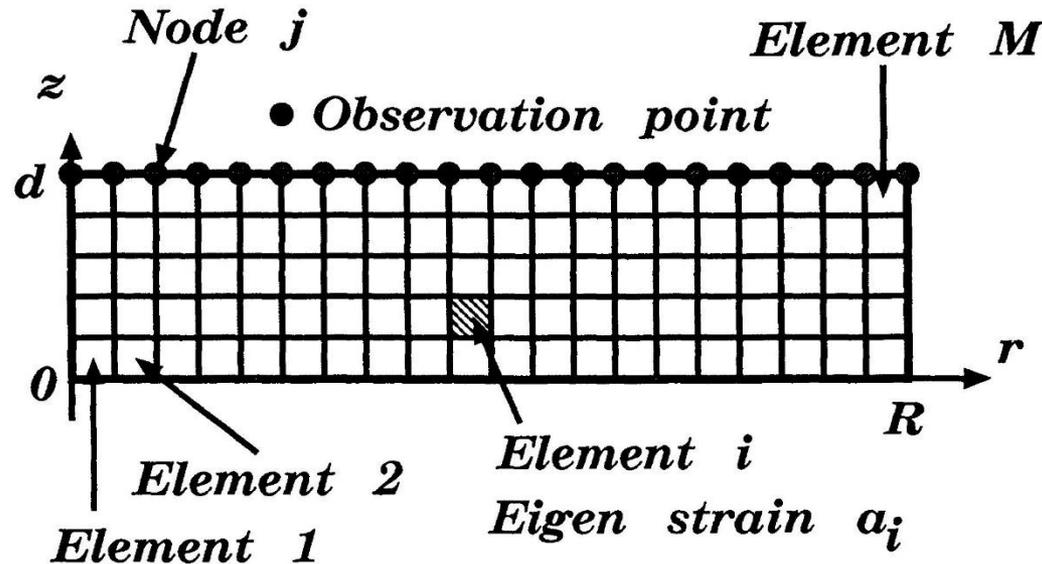
# 固有ひずみ分布の推定

円盤を冷却に際して生じる熱ひずみ(固有ひずみ)の分布を、円盤の上部の変位の計測値から推定することを考えます。このとき、未知数の数は、観測値よりはるかに多くなります。

上面で熱変位計測  $\Rightarrow$  固有ひずみ分布の推定  
未知数の数  $\gg$  計測値の数

変位のデータベースを用いた固有ひずみの推定

固有ひずみ分布をパラメータで表現しない場合



# 固有ひずみ分布の推定結果

特異値分解を適用し、さらに冷却による熱ひずみが非正であることを使うと熱ひずみの分布を推定することができます。

## データ量不足 特異値分解とひずみの非正性を使用

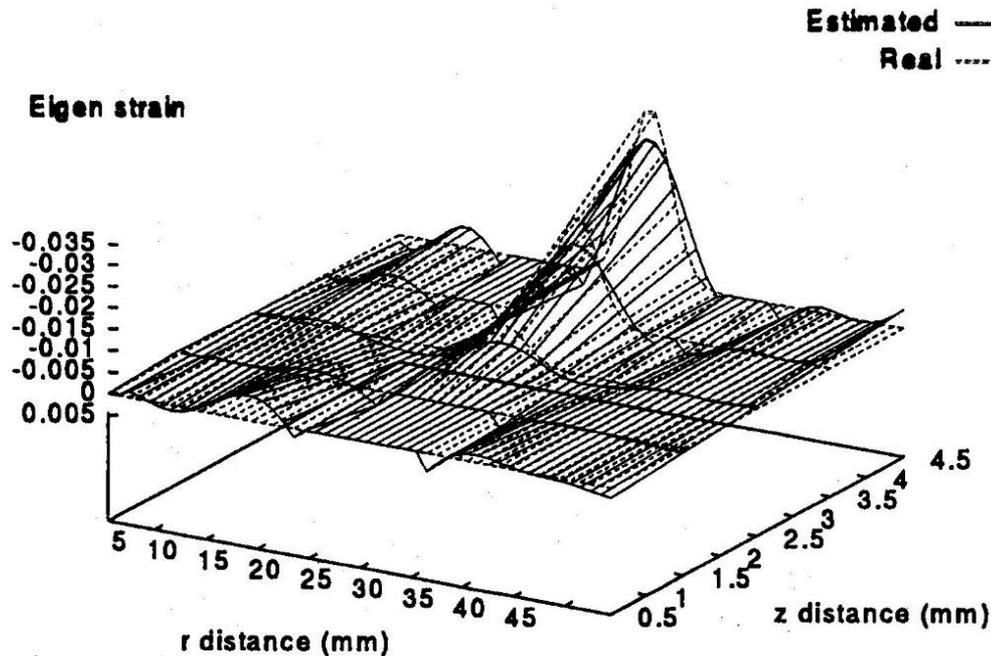


Fig. 4.30 Distribution of eigen strain by using singular value decomposition with reduced rank and non-positive from 51 noisy displacement data with error level of 2% of maximum displacement

疲労き裂があるときの残存寿命評価において、残留応力分布の影響の考慮は欠かせません。しかし、き裂があるときの残留応力分布にはき裂先端で無限大となる特異性があり、そのまま求めることは困難です。そこで、特異性をもたない初期残留応力分布の推定問題に還元すると、問題が簡単になり、釣合い条件を満足する関数による展開も使えます。

## 残留応力場の寿命評価

## 再分布残留応力からの 初期残留応力分布の推定

- 再配分残留応力分布（特異性あり）
- 釣り合い条件を満たす初期残留応力分布の推定（特異性なし。釣り合い条件を満たす関数展開法の導入。少数のパラメータによる表現。安定性あり）

# 支配方程式の推定

逆問題の分類から、支配方程式逆問題が提起できることがわかりました。支配方程式を導くことは天才の業ですが、多くの観測データがあればアプローチできるかもしれません。

支配方程式の発見は天才の業

Laplace, Poisson, Maxwell, Navier, Stokes

観測結果から支配方程式を見つけることができるか？

なら 天才になれる！



# 支配方程式の推定の考え方

支配方程式 物理量:  $\Phi$

常微分方程式

$$A_n d^n \Phi / dx^n + A_{n-1} d^{n-1} \Phi / dx^{n-1} + \dots + A_1 d^1 \Phi / dx^1 + A_0 \Phi = 0$$

偏微分方程式

$$A_{n_0} \partial^n \Phi / \partial x^n + A_{n-1_1} \partial^n \Phi / \partial^{n-1} x \partial y + \dots + A_{0_1} \partial^1 \Phi / dy^1 + A_{0_0} \Phi = 0$$

微係数？

観測値から微係数  $\Rightarrow$  微分方程式の係数に関する式

観測誤差があるときの微係数の計算  $\Rightarrow$  Mollification法

支配方程式の多くは、微分方程式で表記されます。そこで、観測値から微係数が評価できれば、微分方程式の係数を求める問題に置き換えることができます。観測誤差があるときの微係数評価には、モリフィケーション法が有効です。微分方程式の階数等の、種別の判定には、AICのような情報量基準が使えます。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (13)$$

A solution of the Laplace equation

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^5 \sin(ix) \cosh(iy). \quad (14)$$

Observations points are placed on  $n \times n$  lattice points

with noise. Laplaceの式を推定した結果です。誤差があっても、モルフィケーション法を使えば良好な推定が行えます。

Data function  $\Leftarrow$  Interpolation of the value of  $\phi$  given at observation points

The number of  $n = 110$  and the blurring radius  $\delta = 0.16$

Laplaceの式

誤差あり

Mollification法の適用

$$J_s \phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x-s) \phi(s) ds$$

$$\frac{d}{dx} J_s \phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \rho(x-s) \phi(s) ds$$

## 余談

逆問題の解析は、虫の良いことをしようとするので、困難が付きまといますので、工夫が必要です。たとえば、解きやすいように問題を置き換えること、観測情報を追加すること、解の範囲を絞り込むこと、使いやすい解法を適用することなどです。

## 逆問題をデザインする

- ◆ 逆に考える(問題を提起する)
- ◆ 解きやすいように問題の観測情報の与え方を変える
- ◆ 解きやすいように解を絞り込む
- ◆ 使いやすい解法を適用